Analisi II, a.a. 2017-2018 — Soluzioni 7

☹ – **1)** Trovare tutte le funzioni $a(x, y, z) \in C^1(\mathbb{R}^3)$ tali che la forma differenziale

$$y\,dx + x\,dy + a(x, y, z)\,dz$$

sia esatta, e calcolare tutte le primitive. Allo stesso modo, trovare tutte le funzioni $a(y), b(x) \in C^1(\mathbb{R})$ tali che la forma differenziale

$$a(y)\,dx + b(x)\,dy$$

sia esatta, e calcolare tutte le primitive.

La prima forma, supponendo a regolare, è definita su tutto $\mathbb{R}^3$ (semplicemente connesso) quindi è esatta se e solo se è chiusa. Le condizioni di chiusura sono

$$D_2 y = D_1 x, \qquad D_3 y = D_1 a, \qquad D_3 x = D_2 a;$$

la prima è verificata, la seconda e la terza si riducono a $D_1 a = D_2 a = 0$ cioè $a(x, y, z) = a(z)$ è indipendente da x e da y. In altri termini la forma è (chiusa e) esatta se e solo se la funzione a dipende soltanto dalla variabile z. Allora una primitiva è una soluzione $f(x, y, z)$ del sistema

$$D_1 f = y, \qquad D_2 f = x, \qquad D_3 f = a(z);$$

la prima equazione implica $f(x, y, z) = xy + \phi(y, z)$, espressione che introdotta nella seconda equazione dà

$$x + D_2\phi = x$$

ossia $\phi(y, z) = \phi(z)$ non dipende da y; infine introducendo l'espressione $f(x, y, z) = xy + \phi(z)$ nella terza equazione otteniamo

$$\phi'(z) = a(z)$$

ossia in conclusione

$$f(x, y, z) = xy + \phi(z), \qquad \phi(z) \text{ primitiva di } a(z)$$

(naturalmente questo vuol dire $\phi(z) = \int a + C$).
Passiamo alla seconda forma. Anche qui, se supponiamo di cercare funzioni regolari, la forma è definita su tutto $\mathbb{R}^2$ e quindi è chiusa se e solo se è esatta. La condizione di chiusura

$$D_2 a(y) = D_1 b(x)$$

dice che queste due derivate sono uguali per ogni scelta delle variabili x e y, quindi esse devono essere costanti (se non lo fossero, facendo variare x ma non y otteniamo un assurdo). Quindi si ha piú precisamente

$$D_2 a(y) = D_1 b(x) = C$$

e questo implica

$$a(y) = Cy + A, \qquad b(x) = Cx + B$$

per tre costanti arbitrarie A, B, C. Cerchiamo una primitiva $f(x, y)$, quindi risolviamo

$$D_1 f = a(y) = Cy + A, \qquad D_2 f = b(x) = Cx + B;$$

dalla prima si ha

$$f(x, y) = Cxy + Ax + \phi(y)$$

che introdotta nella seconda produce

$$Cx + \phi'(y) = Cx + B \qquad \Longrightarrow \qquad \phi(y) = By + D$$

con D costante arbitraria. In conclusione

$$f(x, y) = Cxy + Ax + By + D.$$

☺ – **2)** Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 strettamente positiva. Dimostrare che l'area del sottografico E di f è uguale a $\int_\gamma xdy$ dove γ è il bordo di E percorso una volta in senso antiorario. (Si può anche esprimere come $-\int_\gamma ydx$ o anche $\frac{1}{2}\int_\gamma (xdy - ydx)$; il risultato è sempre lo stesso).

Se spezziamo γ in quattro parti (lato verticale sinistro; lato verticale destro; base $[a, b]$; lato "curvo" superiore) l'integrale $\int_\gamma xdy$ è uguale alla somma degli integrali sui quattro pezzi. Calcoliamoli separatamente. A questo scopo scegliamo per ciascun pezzo la parametrizzazione piú comoda.

La base $[a,b]$ lungo l'asse delle x si può scrivere come

$$\gamma_1(t) = (t, 0), \qquad a \le t \le b;$$

il "lato destro" verticale, si può scrivere come

$$\gamma_2(t) = (b, t), \qquad 0 \le t \le f(b).$$

Il "lato curvo" superiore naturalmente è proprio il grafico di f, quindi in forma parametrica è del tipo $(t, f(t))$; ma dobbiamo percorrerlo da destra verso sinistra, quindi ad esempio possiamo scriverlo come

$$\gamma_3(t) = (-t, f(-t)), \qquad -b \le t \le -a$$

(notare che in questo modo l'estremo iniziale per $t = -b$ è proprio $(b, f(b))$ mentre l'estremo finale per $t = -a$ è $(a, f(a))$). Infine il"lato sinistro" verticale, che dobbiamo percorrere in discesa, si può scrivere come

$$\gamma_4(t) = (a, -t), \qquad -f(a) \le t \le 0.$$

Passiamo al calcolo diretto: abbiamo subito

$$\int_{\gamma_1} xdy = \int_a^b t \cdot 0 \; dt = 0,$$

$$\int_{\gamma_2} xdy = \int_0^{f(b)} b \cdot 1 \; dt = bf(b).$$

Inoltre possiamo scrivere

$$\int_{\gamma_3} xdy = \int_{-b}^{-a} (-t) \cdot (-f'(-t)) \; dt = -\int_a^b sf'(s)ds$$

dopo il cambiamento di variabile $s = -t$; integrando per parti otteniamo

$$-\int_a^b sf'(s)ds = - \left. sf(s)\right|_{s=a}^{s=b} + \int_a^b f(s)ds$$

e in conclusione

$$\int_{\gamma_3} xdy = \int_a^b f(s)) \; ds + af(a) - bf(b).$$

Infine

$$\int_{\gamma_4} xdy = \int_{-f(a)}^{0} a \cdot (-1) \; dt = -af(a).$$

Sommando i quattro pezzi otteniamo

$$\int_{\gamma} xdy = \int_a^b f(t) \; dt.$$

Le altre formule si dimostrano in modo identico.

☺ – **3)** Calcolare l'integrale delle seguenti forme lungo la circonferenza di centro l'origine e raggio 2 dal punto $(2, 0)$ al punto $(0, 2)$ in senso antiorario [suggerimento: in qualche caso, conviene scegliere un cammino piú comodo o addirittura trovare una primitiva...]

$$\omega = \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \omega = y\sin(xy)dx + x\sin(xy)dy, \qquad \omega = \frac{4x^3dx + 4y^3dy}{x^4+y^4}.$$

L'arco di circonferenza γ si può descrivere come

$$\gamma(t) = (2\cos t, 2\sin t), \qquad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$$

Il primo integrale si calcola facilmente in modo diretto:

$$\int_\gamma \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \int_0^{\pi/2} \frac{-4\cos t \sin t + 4 \sin t \cos t}{2} dt = 0.$$

Il secondo no: il calcolo diretto genera un'espressione complicata. Molto meglio cercare una primitiva, se possibile. Verifichiamo se la forma è chiusa:

$$D_2(y\sin(xy)) = \sin(xy) + xy\cos(xy), \qquad D_1(x\sin(xy)) = \sin(xy) + xy\cos(xy)$$

ossia la forma è chiusa e definita su $\mathbb{R}^2$ e quindi è anche esatta. Una primitiva si determina subito ed è

$$f(x,y) = -\cos(xy)$$

e allora l'integrale si calcola immediatamente come

$$\int_\gamma y\sin(xy)dx + x\sin(xy)dy = f(0,2) - f(2,0) = -\cos(0\cdot 2) + \cos(2\cdot 0) = -1+1 = 0.$$

Anche la terza forma è chiusa (omettiamo la verifica). Essendo definita solo su $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ potrebbe non essere esatta su tutto l'insieme di definizione, ma sicuramente lo è su un aperto semplicemente connesso che contiene il cammino considerato (ad esempio il primo quadrante). Quindi in un intorno di γ non abbiamo problemi e una primitiva si può sicuramente trovare; è facile calcolarla e otteniamo

$$f(x,y) = \log(x^4+y^4)$$

e quindi

$$\int_\gamma \frac{4x^3dx + 4y^3dy}{x^4+y^4} = f(0,2) - f(2,0) = \log(16) - \log(16) = 0.$$

Post scriptum: non tutti gli integrali di forme differenziali fanno 0...

☺ – **4)** (i) Se $f(z)$ è olomorfa, la funzione $f(\overline{z})$ è olomorfa? e la funzione $\overline{f(\overline{z})}$?
(ii) Calcolare i seguenti integrali complessi lungo la circonferenza di centro 0 e raggio 2 (percorsa una volta in senso antiorario):

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z}dz, \qquad \int_\gamma \frac{1+z}{z}dz \qquad \int_\gamma (z^3-z)dz, \qquad \int_\gamma (z^3-\overline{z})dz.$$

(i) Se $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ è olomorfa, valgono le condizioni di Cauchy Riemann

$$u_x(x,y) \equiv v_y(x,y), \qquad u_y(x,y) \equiv -v_x(x,y);$$

ora possiamo scrivere

$$f(\overline{z}) = f(x-iy) = u(x,-y) + iv(x,-y)$$

e chiaramente questa nuova funzione non verifica le condizioni di Cauchy Riemann, ad esempio

$$\partial_x(u(x,-y)) = u_x(x,-y), \qquad \partial_y(v(x,-y)) = -v_y(x,-y) \equiv -u_x(x,-y)$$

non sono uguali (lo stesso dicasi per la seconda condizione). Invece per la funzione $\overline{f(\overline{z})}$ abbiamo

$$\overline{f(\overline{z})} = \overline{f(x-iy)} = u(x,-y) - iv(x,-y)$$

e stavolta le condizioni sono verificate:

$$\partial_x(u(x,-y)) = u_x(x,-y), \qquad \partial_y(-v(x,-y)) = v_y(x,-y) \equiv u_x(x,-y)$$

cioè $\partial_x(u(x,-y)) = \partial_y(-v(x,-y))$, e

$$\partial_y(u(x,-y)) = -u_y(x,-y), \qquad \partial_x(-v(x,-y)) = -v_x(x,-y) \equiv u_y(x,-y)$$

cioè $\partial_y(u(x,-y)) = -\partial_x(-v(x,-y))$. In conclusione, se $f(z)$ è olomorfa, allora $f(\overline{z})$ non lo è mentre $\overline{f(\overline{z})}$ è olomorfa.
(ii) Come è noto (e si può verificare immediatamente)

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = 2\pi i$$

su ogni curva che gira una volta in senso antiorario intorno all'origine, in particolare sulla circonferenza γ data. Invece l'integrale su γ di una funzione olomorfa all'interno della circonferenza fa 0. Quindi abbiamo immediatamente

$$\int_\gamma \frac{1+z}{z}dz = \int_\gamma \frac{1}{z}dz + \int_\gamma 1dz = 2\pi i + 0 = 2\pi i$$

e anche

$$\int_\gamma (z^3-z)dz = 0.$$

Invece per il quarto integrale

$$\int_\gamma (z^3 - \overline{z})dz = -\int_\gamma \overline{z}\, dz$$

perché z^3 è olomorfa ma $\overline{z}$ no, e quindi il secondo integrale potrebbe essere diverso da 0. Infatti

$$\int_\gamma \overline{z}\, dz = \int_0^{2\pi} \overline{2e^{it}} \cdot 2ie^{it} dt = 4i \int_0^{2\pi} e^{-it} \cdot e^{it} dt = 8\pi i$$

e in conclusione

$$\int_\gamma (z^3 - \overline{z})dz = -8\pi i.$$

Per finire studiamo il primo integrale. La sostituzione diretta porta ad un integrale in apparenza intrattabile. Ma ci sono molti modi alternativi di calcolarlo! Ad esempio si può osservare che la formula di Cauchy applicata alla funzione olomorfa $f(z) = e^z$ nel punto $z_0 = 0$ dà subito

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{e^z}{z} dz$$

e dato che $f(0) = 1$ otteniamo

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z} dz = 2\pi i.$$

Un modo piú interessante è il seguente (anche se qualche dettaglio andrebbe precisato in modo piú rigoroso): se scriviamo

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots$$

vediamo che

$$\frac{e^z}{z} = \frac{1}{z} + 1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \ldots$$

ossia

$$\frac{e^z}{z} = \frac{1}{z} + \text{funzione olomorfa}$$

e quindi... Naturalmente in questo argomento il passaggio mancante è la dimostrazione che la serie dà effettivamente una funzione olomorfa. Qualche idea?

☺ – **5)** Dimostrare che non esiste nessuna funzione olomorfa $f(z)$ tale che $\Re(f(z)) = 3x^2 + y^2$. Trovare due funzioni continue su $\mathbb{C}$ la cui parte reale è $3x^2 + y^2$.

Sia $f(z) = 3x^2 + y^2 + i\, v(x, y)$. Se f fosse olomorfa, dovrebbero valere le equazioni di Cauchy-Riemann, e quindi $v_x(x, y) = -2y$ e $v_y(x, y) = 6x$. Equivalentemente, v dovrebbe essere una funzione il cui gradiente ∇v è uguale a $(-2y, 6x)$. Dal momento che la forma differenziale $\omega(x, y) = -2y\, dx + 6x\, dy$ non è esatta (non essendo chiusa), una tale funzione non esiste. Se $\varphi(x, y)$ è una qualsiasi funzione continua su $\mathbb{R}^2$, la funzione $f(z) = f(x + iy) = 3x^2 + y^2 + i\, \varphi(x, y)$ ha come parte reale $3x^2 + y^2$ ed è continua.

☹ – **6)** Determinare una funzione (non nulla) $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^2 tale che $u(x, y) = \phi(x) \operatorname{sen}(y)$ sia la parte reale di una funzione olomorfa su $\mathbb{C}$. Successivamente, determinare almeno una funzione olomorfa di cui u sia la parte reale.

Sia $f(z) = \varphi(x) \operatorname{sen}(y) + i\, v(x, y)$. Chiedere che f sia olomorfa è equivalente a chiedere che φ sia $C^\infty(\mathbb{R})$, che v sia $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ e che valgano le equazioni di Cauchy-Riemann. In particolare, deve essere

$$\nabla v(x, y) = (v_x(x, y), v_y(x, y)) = (-\varphi(x)\, \cos(y), \varphi'(x) \operatorname{sen}(y))\,.$$

Equivalentemente, deve essere esatta su $\mathbb{R}^2$ la forma differenziale

$$\omega(x, y) = -\varphi(x)\, \cos(y)\, dx + \varphi'(x) \operatorname{sen}(y)\, dy\,.$$

Essendo $\mathbb{R}^2$ semplicemente connesso, condizione necessaria e sufficiente affinché ω sia esatta è che sia chiusa. Pertanto, deve essere

$$\varphi(x) \operatorname{sen}(y) = \varphi''(x) \operatorname{sen}(y)\,,$$

ovvero $\varphi''(x) = \varphi(x)$, da cui $\varphi(x) = A\, \mathrm{e}^x + B\, \mathrm{e}^{-x}$, con A e B costanti *reali* (che scegliamo diverse da $(0, 0)$ se vogliamo φ non nulla). Per determinare una funzione $f(z)$ di cui u sia la parte reale, prendiamo $A = 1$ e

$B = 0$ e troviamo $u(x, y) = \mathrm{e}^x \operatorname{sen}(y)$, da cui (a meno di costanti arbitrarie) $v(x, y) = -\mathrm{e}^x \cos(y)$. Pertanto $f(z) = \mathrm{e}^x (\operatorname{sen}(y) - i \cos(x)) = -i\,\mathrm{e}^z$.

☹ – **7)** Calcolare, al variare di n,

$$I_n = i \int_0^{2\pi} [2\cos(\theta)]^{2n}\, d\theta\,,$$

dimostrando che si ha

$$I_n = \int_\gamma \left(z + \frac{1}{z}\right)^{2n} \frac{1}{z}\,, \qquad \gamma = \mathrm{e}^{i\theta}\,,\ \theta \in [0, 2\pi]\,,$$

e successivamente calcolando quest'ultimo integrale.

Lungo la curva γ si ha, ricordando che $2\cos(\theta) = \mathrm{e}^{i\,\theta} + \mathrm{e}^{-i\,\theta}$,

$$I_n = \int_0^{2\pi} [\mathrm{e}^{i\,\theta} + \mathrm{e}^{-i\,\theta}]\, i\, d\theta = i \int_0^{2\pi} [2\cos(\theta)]^{2n}\, d\theta\,,$$

come volevasi dimostrare. Essendo

$$\left(z + \frac{1}{z}\right)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} z^k \left(\frac{1}{z}\right)^{2n-k} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \left(\frac{1}{z}\right)^{2n-2k}\,,$$

si ha

$$I_n = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \int_\gamma \frac{1}{z^{2n+1-2k}}\,.$$

È facile vedere che l'integrale è diverso da zero se e solo se $2n + 1 - 2k = 1$, ovvero se e solo se $k = n$. Pertanto,

$$I_n = 2\pi\, i \binom{2n}{n} = 2\pi\, i\, \frac{(2n)!}{(n!)^2}\,.$$

☺ – **8)** Calcolare

$$\int_\gamma \frac{z^2 + 4}{z(z^2 + 1)}\,,$$

dove γ è la circonferenza di centro l'origine e raggio 4, percorsa in senso antiorario.

La curva γ "gira" intorno all'origine, a $z = i$ e a $z = -i$. Inoltre,

$$\frac{z^2 + 4}{z(z^2 + 1)} = \frac{4}{z} - \frac{3}{2}\,\frac{1}{z + i} - \frac{3}{2}\,\frac{1}{z - i}\,,$$

e quindi

$$\int_\gamma \frac{z^2 + 4}{z(z^2 + 1)} = 4 \int_\gamma \frac{1}{z} - \frac{3}{2} \int_\gamma \frac{1}{z + i} - \frac{3}{2} \int_\gamma \frac{1}{z - i}\,.$$

Dal momento che tutti e tre gli integrali valgono $2\pi\, i$ (essendo uguali a $2\pi\, i$ volte il valore della funzione $g(z) \equiv 1$ in 0, i e $-i$),

$$\int_\gamma \frac{z^2 + 4}{z(z^2 + 1)} = 2\pi\, i\,.$$

☺ – **9)** Verificare se la seguente forma differenziale è esatta:

$$[\sin(x + y) - \sin x \sin z]dx + [\sin(x + y) - \cos(y - z)]dy + [\cos x \cos z + \cos(y - z)]dz\,.$$

In caso affermativo determinarne *tutte* le primitive.

La forma differenziale assegnata è definita in $\mathbb{R}^3$. Verificarne la chiusura in $\mathbb{R}^3$ corrisponde a verificare che in $\mathbb{R}^3$ valgano le seguenti tre uguaglianze:

$$\frac{\partial[\sin(x + y) - \sin x \sin z]}{\partial y} = \cos(x + y) = \frac{\partial[\sin(x + y) - \cos(y - z)]}{\partial x}$$

$$\frac{\partial[\sin(x + y) - \sin x \sin z]}{\partial z} = -\sin x \cos z = \frac{\partial[\cos x \cos z + \cos(y - z)]}{\partial x}$$

$$\frac{\partial[\sin(x+y)-\cos(y-z)]}{\partial z} = -\sin(y-z) = \frac{\partial[\cos x\cos z+\cos(y-z)]}{\partial y} \ .$$

Quindi la forma è chiusa in $\mathbb{R}^3$, semplicemente connesso, e dunque esatta. Ricerchiamone tutte le primitive $F(x,y,z)$. Per prima cosa:

$$F(x,y,z) = \int (\sin(x+y) - \sin x \sin z)dx = -\cos(x+y) + \cos x \sin z + g(y,z) \ ,$$

quindi derivando rispetto a y l'espressione appena ricavata per F si ha

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \sin(x+y) + \frac{\partial g}{\partial y}$$

che affinchè F sia una primitiva della forma deve essere uguale a $\sin(x+y) - \cos(y-z)$ da cui si deduce che $\frac{\partial g}{\partial y} = -\cos(y-z)$ e quindi che $g(y,z) = -\sin(y-z) + h(z)$. Riassumendo per ora sappiamo che $F(x,y,z) = -\cos(x+y) + \cos x \sin z - \sin(y-z) + h(z)$. La funzione h sara' determinata a partire dall' ultima condizione su F. Per prima cosa derivando rispetto a z l'espressione appena ricavata per F si ha:

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \cos x \cos z + \cos(y-z) + \frac{dh}{dz}$$

che affinchè F sia una primitiva della forma deve essere uguale a $\cos x \cos z + \cos(y-z)$, uguagliando gli ultimi due membri si ha che $\frac{dh}{dz} = 0$ e quindi che h è costante. Riassumendo *tutte* le primitive sono della forma $F(x,y,z) = -\cos(x+y) + \cos x \sin z - \sin(y-z) + c$, dove c è una costante arbitraria.

☺ – **10)** Sia ∂T l'ellisse avente come assi di simmetria gli assi coordinati del piano xy e passante per i punti $(2,0)$ e $(0,1)$, percorsa in senso antiorario, si calcoli

$$I = \int_{\partial T} (x^3+y^2)dx + (x^2+y^3)dy \ .$$

Se la forma fosse esatta in un aperto contenente l'ellisse piena, l'integrale richiesto (essendo calcolato su una curva chiusa) sarebbe uguale a 0. Purtroppo la forma non è esatta in nessun aperto contenente l'ellisse ed i suoi punti interni, non essendo ivi neanche chiusa infatti $\frac{\partial(x^3+y^2)}{\partial y} = 2y \neq \frac{\partial(x^2+y^3)}{\partial x} = 2x$. Per poter calcolare l'integrale si deve perció procedere alla parametrizzazione della curva : $(x(t),y(t)) = (2\cos t, \sin t)$, $t \in [0,2\pi]$ e calcolare:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \{-[8(\cos t)^3 + (\sin t)^2] 2\sin t + [4(\cos t)^2 + (\sin t)^3]\cos t\} dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \{-16(\cos t)^3 \sin t + (\sin t)^3 \cos t - 2(\sin t)^3 + 4(\cos t)^3\} dt = \\ &= 4(\cos t)^4 + \frac{1}{4}(\sin t)^4 + 4\Big[\sin t - \frac{1}{3}(\sin t)^3\Big] - 2\Big[\frac{1}{3}(\cos t)^3 - \cos t\Big] \ \Big|_0^{2\pi} = 0 \ . \end{aligned}$$

Quindi in questo caso l'integrale I lungo una curva chiusa è zero anche se la forma non è esatta.