

Analisi II, a.a. 2017-2018 — Soluzioni 8

☺☺ – 1) Sia $f : E \rightarrow \mathbf{C}$ una funzione olomorfa su $E \subseteq \mathbf{C}$ aperto connesso. Dimostrare che se f assume solo valori reali, allora f è costante. (☺) Dimostrare che se f ha modulo costante (cioè $|f(z)| = C$) allora f è costante.

Se scriviamo $f = u(x, y) + iv(x, y)$, dire che f assume solo valori reali equivale a dire che la parte immaginaria di f è nulla, ossia $v(x, y) \equiv 0$. Dunque se $f(z)$ è olomorfa, dalle condizioni di Cauchy Riemann otteniamo subito $u_x = v_y = 0$, $u_y = -v_x = 0$ ossia $Du \equiv 0$ e quindi anche la funzione u è costante sul connesso E . Se invece $f(z)$ è olomorfa con modulo costante C , questo vuol dire che la funzione $|f(z)|^2$ è costante, ossia

$$|f(z)|^2 = u^2 + v^2 = C^2.$$

Derivando questa identità otteniamo

$$uu_x + vv_x = 0, \quad uu_y + vv_y = 0.$$

D'altra parte sappiamo che $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ e quindi abbiamo subito

$$0 = uu_x + vv_x = uu_x - vv_y, \quad 0 = uu_y + vv_y = uu_y + vu_x$$

Moltiplicando la prima per u , la seconda per v e sommando otteniamo

$$0 = (u^2 + v^2)u_x = C^2 u_x$$

e in modo simile (moltiplicando la prima per v , la seconda per u e sottraendo)

$$0 = (u^2 + v^2)u_y = C^2 u_y.$$

In conclusione, o $C = 0$, e quindi $f(z)$ è la funzione nulla, oppure $C \neq 0$, e allora $u_x \equiv 0$, $u_y \equiv 0$ cioè u è costante. Se u è costante, le condizioni di Cauchy Riemann ci dicono che anche v deve essere costante.

☺ – 2) Sia $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$ una curva chiusa C^1 che non passa per l'origine e consideriamo la funzione $F : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$ definita come

$$F(s) = \int_a^s \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} dt.$$

(i) Calcolare la derivata $F'(s)$.

(ii) Data la funzione $G(s) = \gamma(s)e^{-F(s)}$, dimostrare che G è costante su $[a, b]$ (calcolandone la derivata).

(iii) Dedurre che $e^{-F(b)} = 1$ e quindi $F(b) = 2\pi i n$ per qualche intero n (positivo o negativo).

(iv) Concludere che il numero

$$I_\gamma(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z}$$

è sempre un numero intero. Questa è la definizione rigorosa del “numero dei giri che γ fa intorno a $z = 0$ ”, e si chiama l'indice di γ rispetto a 0 (o anche numero di avvolgimento). Sapreste scrivere la formula per il numero dei giri $I_\gamma(z_0)$ intorno a un punto arbitrario z_0 ?

(i) Si ha subito, dato che la funzione sotto integrale è continua e quindi F è C^1 ,

$$F'(s) = \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)}.$$

(ii) Quindi la derivata di $G(s) = \gamma(s)e^{-F(s)}$ è data da

$$G'(s) = \gamma'(s)e^{-F(s)} - F'(s)\gamma(s)e^{-F(s)} = \gamma'(s)e^{-F(s)} - \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)}\gamma(s)e^{-F(s)} \equiv 0$$

ossia $G(s)$ è costante su $[a, b]$.

(iii) Dal punto precedente segue che $G(a) = G(b)$. Ma $G(a) = \gamma(a)e^{-F(a)} = \gamma(a)$ dato che $F(a) = 0$, mentre $G(b) = \gamma(b)e^{-F(b)} = \gamma(a)e^{-F(b)}$ essendo γ una curva chiusa. Otteniamo

$$\gamma(a) = \gamma(a)e^{-F(b)} \implies e^{-F(b)} = 1$$

e questo implica che $F(b) = 2\pi i \cdot n$ per qualche numero intero n [infatti $e^z = e^{x+iy} = 1$ vuol dire

$$e^x(\cos y + i \sin y) = 1 \implies \sin y = 0 \implies y = k\pi \implies \cos y = \pm 1$$

ma chiaramente $\cos y = -1$ non è possibile e resta solo la possibilità $\cos y = 1$ cioè k deve essere pari, e $e^x = 1$ cioè $x = 0$. In conclusione $z = 2n\pi i$.]

(iv) Abbiamo immediatamente

$$I_\gamma(0) = \frac{1}{2\pi i} F(b) = n.$$

La formula per l'indice intorno ad un punto generico z_0 è semplicemente

$$I_\gamma(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z - z_0}.$$

☺ – 3) Calcolare i seguenti integrali iterati, prima nell'ordine $dydx$ e poi nell'ordine inverso:

$$\int_3^4 dx \int_1^2 \frac{dy}{(x+y)^2}, \quad \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x^2}{1+y^2} dy, \quad \int_1^2 dx \int_1^2 (x^3 + \sqrt{x+y}) dy.$$

Primo integrale:

$$\int_3^4 dx \int_1^2 \frac{dy}{(x+y)^2} = \int_3^4 -\frac{1}{(x+y)} \Big|_{y=1}^{y=2} dx = \int_3^4 \left[\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right] dx = \log \frac{x+1}{x+2} \Big|_{x=3}^{x=4} = \log \frac{25}{24}$$

oppure

$$\int_1^2 dy \int_3^4 \frac{dx}{(x+y)^2} = \int_1^2 -\frac{1}{(x+y)} \Big|_{x=3}^{x=4} dy = \int_1^2 \left[\frac{1}{3+y} - \frac{1}{4+y} \right] dy = \log \frac{3+y}{4+y} \Big|_{y=1}^{y=2} = \log \frac{25}{24}.$$

Secondo integrale:

$$\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x^2}{1+y^2} dy = \int_0^1 x^2 \arctan y \Big|_{y=0}^{y=1} dx = \frac{\pi}{4} \int_0^1 x^2 dx = \frac{\pi}{4} \frac{x^3}{3} \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{\pi}{12}$$

oppure

$$\int_0^1 dy \int_0^1 \frac{x^2}{1+y^2} dx = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{x^3}{1+y^2} \Big|_{x=0}^{x=1} dx = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{1}{1+y^2} dy = \frac{\pi}{12}.$$

Terzo integrale:

$$\int_1^2 dx \int_1^2 (x^3 + \sqrt{x+y}) dy = \int_1^2 \left(x^3 y + \frac{2}{3} (x+y)^{3/2} \right) \Big|_{y=1}^{y=2} dx = \int_1^2 \left(x^3 + \frac{2}{3} (x+2)^{3/2} - \frac{2}{3} (x+1)^{3/2} \right) dx$$

e quindi

$$= \left(\frac{x^4}{4} + \frac{4}{15} (x+2)^{5/2} - \frac{4}{15} (x+1)^{5/2} \right) \Big|_{x=1}^{x=2} = \frac{737}{60} + \frac{16}{15} \sqrt{2} - \frac{72}{15} \sqrt{3}.$$

L'integrale iterato nell'ordine inverso dà lo stesso valore (grazie Fubini!!).

☺ – 4) Calcolare l'integrale $\iint_Q f(x,y) dx dy$ dove Q è il quadrato $[0,1] \times [0,1]$ e $f(x,y)$ è una delle funzioni seguenti:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 1-x-y \quad \text{se } x+y \leq 1, & f(x,y) &= 0 \quad \text{altrimenti;} \\ f(x,y) &= xy \quad \text{se } x^2+y^2 \leq 1, & f(x,y) &= 0 \quad \text{altrimenti;} \\ f(x,y) &= x+y \quad \text{se } x^2 \leq y \leq x, & f(x,y) &= 0 \quad \text{altrimenti.} \end{aligned}$$

Il primo integrale è uguale a

$$\int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (1-x-y) dy \right) dx = \int_0^1 \left(y - xy - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{y=0}^{y=1-x} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-x)^2 dx = \frac{1}{6}.$$

Il secondo integrale è dato da

$$\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} xy dy \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x(1-x^2) dx = \frac{1}{8}.$$

Infine il terzo integrale si può scrivere

$$\int_0^1 \left(\int_{x^2}^x (x+y) dy \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{3}{2} x^2 - x^3 - \frac{1}{2} x^4 \right) dx = \frac{3}{20}.$$

☉ – 5) Calcolare

$$\iint_C \frac{e^{\frac{x}{y}}}{y^3} dx dy, \quad C = [0, 1] \times [1, 2].$$

Conviene integrare prima in x e poi in y :

$$\iint_C \frac{e^{\frac{x}{y}}}{y^3} dx dy = \int_1^2 \left(\int_0^1 \frac{e^{\frac{x}{y}}}{y^3} dx \right) dy = \int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{y}} - 1}{y^2} dy = -e^{\frac{1}{y}} + \frac{1}{y} \Big|_1^2 = e - \sqrt{e} - \frac{1}{2}.$$

☉ – 6) Verificare, senza calcolare l'integrale, che

$$7\pi[\ln(3) - \ln(4)] \leq \iint_C \ln[(y - x^2 + 2)^7] dx dy \leq 7\pi \ln(3), \quad C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Si tratta – in realtà – di un problema di massimo e minimo... Si verifica facilmente, eventualmente usando i moltiplicatori di Lagrange, che si ha

$$\frac{3}{4} \leq y - x^2 + 2 \leq 3, \quad \forall (x, y) \in C.$$

L'esercizio si conclude allora facilmente usando la monotonia del logaritmo, dell'integrale, ed il fatto che la misura bidimensionale di C vale π .

☉ – 7) Calcolare il seguente integrale:

$$\iint_C e^{\frac{y}{x}} dx dy, \quad C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 2, \frac{y}{2} \leq x \leq \min(y, 1)\}.$$

È chiaro che integrare prima in x e poi in y non è possibile (non si conosce una primitiva di $e^{\frac{y}{x}}$). È allora necessario “girare” l'insieme; si vede facilmente che si ha

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 2x\},$$

e quindi

$$\iint_C e^{\frac{y}{x}} dx dy = \int_0^1 \left(\int_x^{2x} e^{\frac{y}{x}} dy \right) dx = \int_0^1 x(e^2 - e) dx = \frac{e^2 - e}{2}.$$

☉ – 8) Calcolare (se esiste)

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{dx dy}{(1 + x^2 + y^2)^2}.$$

Per definizione, si ha

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{dx dy}{(1 + x^2 + y^2)^2} = \lim_{R \rightarrow +\infty} \iint_{B_R(0)} \frac{dx dy}{(1 + x^2 + y^2)^2}.$$

Passando in coordinate polari, si tratta allora di calcolare

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\rho}{(1 + \rho^2)^2} d\rho d\theta = \lim_{R \rightarrow +\infty} \pi \int_0^R \frac{d(1 + \rho^2)}{(1 + \rho^2)^2} = \lim_{R \rightarrow +\infty} \pi \left(1 - \frac{1}{1 + R^2} \right) = \pi.$$

☉ – 9) Calcolare il seguente integrale:

$$\int \int_Q \frac{x\sqrt{|y|}}{1 + \sqrt{|y|}} dx dy,$$

dove $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 2\}$.

Poichè l'integrando è il prodotto di una funzione di x e una di y , l'integrale assegnato è uguale a

$$\int_0^1 x dx \int_{-1}^2 \frac{\sqrt{|y|}}{1 + \sqrt{|y|}} dy = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 \left(\int_{-1}^0 \frac{\sqrt{-y}}{1 + \sqrt{-y}} dy + \int_0^2 \frac{\sqrt{y}}{1 + \sqrt{y}} dy \right) =$$

ponendo $t = \sqrt{-y}$ e $s = \sqrt{y}$, si ha rispettivamente $-2t dt = dy$ e $2s ds = dy$, e quindi:

$$= \frac{1}{2} \left(\int_1^0 \frac{-2t^2}{1 + t} dt + \int_0^{\sqrt{2}} \frac{2s^2}{1 + s} ds \right) = \int_0^1 \left(t - 1 + \frac{1}{1 + t} \right) dt + \int_0^{\sqrt{2}} \left(s - 1 + \frac{1}{1 + s} \right) ds =$$

$$= F(1) - F(0) + F(\sqrt{2}) - F(0)$$

dove $F(t) = t^2/2 - t + \ln|t+1|$, quindi il valore dell'integrale è $1/2 - \sqrt{2} + \ln(2 + 2\sqrt{2})$.

© – **10**) Calcolare il seguente integrale:

$$\int \int_F \frac{dx dy}{1+x},$$

dove $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$.

L'integrale richiesto può essere riscritto come

$$\int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} \frac{dy}{1+x} \right) dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x} (\sqrt{x} - x^2) dx = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} (t - t^4) 2t dt =$$

doove si è posto $t = \sqrt{x}$ e quindi $dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2t} dx$,

$$\begin{aligned} &= -2 \int_0^1 \frac{t^5 - t^2}{1+t^2} dt = -2 \int_0^1 \left(t^3 - t - 1 + \frac{t+1}{1+t^2} \right) dt = \\ &= -2 \left(\frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{2} - t + \frac{1}{2} \ln(1+t^2) + \arctan t \right) \Big|_0^1 = \frac{5}{2} - \frac{\pi}{2} - \ln 2. \end{aligned}$$