

☉ – 1) Calcolare l'integrale $\int_{\gamma} \omega$ dove

$$\omega = \frac{dx}{1+y^2} - \frac{2xy}{(1+y^2)^2}$$

mentre γ è la curva

$$\gamma(t) = \left(e^{\sin t}, \frac{2 \cos t}{1 + \cos^2 t} \right), \quad 0 \leq t \leq \pi/2.$$

Non scriviamo neanche la complicata espressione che si ottiene tentando di eseguire il calcolo diretto. Infatti la forma è chiusa:

$$D_2 \left(\frac{1}{1+y^2} \right) = -\frac{2}{(1+y^2)^2} = D_1 \left(-\frac{2xy}{(1+y^2)^2} \right)$$

e quindi è esatta essendo definita su $\mathbb{R}^2$ semplicemente connesso.

Facile trovare una primitiva: $f(x, y) = x/(1+y^2)$; questo basta per rispondere all'esercizio:

$$\int_{\gamma} \omega = f(e, 0) - f(1, 1) = e - \frac{1}{2}.$$

☉ – 2) Data la forma su $\mathbb{R}^3$

$$\omega = 2xz \, dx + yz \, dy + A(x, y) \, dz$$

determinare sotto quali condizioni sulla funzione $A(x, y)$ la forma è chiusa, esatta, e quindi calcolarne tutte le primitive.

Se imponiamo le condizioni di chiusura

$$D_2\omega_1 = D_1\omega_2, \quad D_2\omega_3 = D_3\omega_2, \quad D_3\omega_1 = D_1\omega_3,$$

otteniamo che la forma è chiusa se e solo se

$$A_x(x, y) = 2x, \quad A_y(x, y) = y$$

e quindi A deve essere del tipo

$$A(x, y) = x^2 + y^2/2 + C$$

con C costante arbitraria. Naturalmente la forma è definita ovunque e quindi esatta, e le primitive sono le funzioni del tipo

$$f(x, y, z) = x^2z + \frac{1}{2}y^2z + Cz + D$$

con C, D costanti arbitrarie.

☉ – 3) Sia $f(z) = u + iv$ una funzione continua di parte reale u e parte immaginaria v . Se $v(x, y) = xy$, per quali funzioni $u(x, y)$ la funzione f è olomorfa? Se $u(x, y) = e^x(x \cos y - y \sin y)$, per quali $v(x, y)$ la funzione f è olomorfa?

Prima domanda: le condizioni di Cauchy Riemann dicono che u deve soddisfare

$$u_x = v_y \equiv x, \quad u_y = -v_x \equiv -y.$$

Dalla prima condizione otteniamo $u(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + \phi(y)$ e quindi dalla seconda $\phi(y) = -\frac{1}{2}y^2 + C$, ossia in conclusione $u(x, y)$ deve essere del tipo $u = \frac{1}{2}(x^2 - y^2) + C$. Quindi abbiamo ricostruito la funzione $f(z)$:

$$f(z) = u + iv = \frac{1}{2}(x^2 - y^2) + ixy + C \equiv \frac{z^2}{2} + C.$$

Seconda domanda: procedimento simile, possiamo scrivere

$$v_x = -u_y \equiv e^x(x \sin y + \sin y + y \cos y), \quad v_y = u_x \equiv e^x(x \cos y - y \sin y + \cos y);$$

ad esempio integrando la seconda rispetto a y otteniamo

$$v(x, y) = e^x(x \sin y + y \cos y) + \phi(x)$$

e sostituendo nella prima vediamo che $\phi'(x) = 0$ cioè $\phi = C$. In conclusione

$$v(x, y) = e^x(x \sin y + y \cos y) + C$$

e

$$f(z) = u + iv = e^x(x \cos y - y \sin y) + ie^x(x \sin y + y \cos y) + C$$

che possiamo scrivere

$$f(z) = e^x(xe^{iy} + iye^{iy}) + C.$$

La riconoscete? è semplicemente $f(z) = ze^z + C$.

☺ – 4) Calcolare i seguenti integrali multipli sui domini indicati a fianco:

$$\int \int_D (x^2 y + y^3) dx dy, \quad D = \{0 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq -1\}$$

$$\int \int \int_D (xyz^2) dx dy dz, \quad D = \{0 \leq x \leq 1, -x \leq z \leq x, x + z \leq y \leq 4\}$$

$$\int \int_T (x - y^2) dx dy, \quad T = \text{triangolo di vertici } (0, 0), (1, 1) \text{ e } (2, -1)$$

Il primo integrale è uguale a

$$\int_0^2 dx \int_{-2}^{-1} (x^2 y + y^3) dy = -\frac{23}{2}.$$

Per il secondo integrale, il dominio di integrazione è un prisma nello spazio (riuscite a disegnarlo?). Possiamo scrivere l'integrale come

$$\int_0^1 dx \int_{-x}^x dz \int_{x+z}^4 (xyz^2) dy = \frac{104}{105}$$

Per il terzo spezziamo il triangolo in due insiemi normali:

$$\int_0^1 dx \int_{-x/2}^x (x - y^2) dy + \int_1^2 dx \int_{-x/2}^{3-2x} (x - y^2) dy = \frac{13}{32} + \frac{27}{32} = \frac{5}{4}.$$

☺ – 5) Calcolare il seguente integrale utilizzando le coordinate polari:

$$\int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{x^2+y^2} dy.$$

Stessa domanda per l'integrale

$$\int \int_C y dx dy,$$

dove C è la metà superiore (cioè con $y \geq 0$) del cerchio di centro $(a/2, 0)$ passante per l'origine.

Stessa domanda per l'integrale

$$\int \int_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy,$$

dove D è la metà superiore ($y \geq 0$) del cerchio di centro l'origine e raggio a .

Infine effettuare il cambiamento di variabili $u = x + y$, $v = x - y$ nell'integrale

$$\int_0^1 dx \int_0^1 (x + y) dy$$

e poi calcolarlo.

Il primo integrale ha come dominio di integrazione il quarto del cerchio di centro 0 e raggio a nel primo quadrante. Bisogna rappresentare questo insieme in coordinate polari; la circonferenza in coordinate polari si scrive semplicemente

$$\rho = a, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

e quindi l'integrale diventa ($\sqrt{x^2 + y^2} = \rho$)

$$\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^a \rho \cdot \rho d\rho = \frac{a^3}{3} \int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi a^3}{6}.$$

Per il secondo integrale il dominio è un po' più complicato: in coordinate polari si scrive come

$$\rho = a \cos \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Quindi l'integrale diventa

$$\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{a \cos \theta} \rho \sin \theta \cdot \rho d\rho = \frac{a^3}{3} \int_0^{\pi/2} \cos^3 \theta \sin \theta d\theta = \frac{a^3}{3} \int_0^{\pi/2} \cos^3 \theta d(\cos \theta) = a^3 \frac{\cos^4 \theta}{12} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{a^3}{12}.$$

Il terzo integrale diventa

$$\int_0^{\pi} d\theta \int_0^a \sqrt{a^2 - \rho^2} \rho d\rho = \int_0^{\pi} \left(-\frac{1}{3} (\sqrt{a^2 - \rho^2})^3 \right)_0^a d\theta = \frac{\pi a^3}{3}.$$

Ultimo integrale. Vogliamo passare dalle coordinate (x, y) a quelle (u, v) . La funzione da integrare $f(x, y) = x + y$ si scrive semplicemente $f = u$ nelle nuove coordinate. Il determinante Jacobiano che ci interessa è quello della trasformazione $(x, y) = g(u, v)$ secondo la "regola"

$$dx dy = \det |Dg| du dv;$$

dato che $x = \frac{1}{2}(u+v)$, $y = \frac{1}{2}(u-v)$, otteniamo il determinante Jacobiano (del quale poi prenderemo il modulo)

$$\det \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}.$$

Per applicare la formula del cambiamento di variabili resta da scrivere il dominio di integrazione: nelle variabili (x, y) è il quadrato $[0, 1]^2$, nelle variabili (u, v) diventa l'insieme

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \leq u+v \leq 2, \quad 0 \leq u-v \leq 2$$

ossia il quadrato Q di vertici $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 0)$, $(1, -1)$. In conclusione

$$\int_0^1 dx \int_0^1 (x+y) dy = \frac{1}{2} \int \int_Q u du dv = \frac{1}{2} \int_0^1 du \int_{-u}^u u dv + \frac{1}{2} \int_1^2 du \int_{u-2}^{2-u} u dv = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1.$$

[Sottolineo che lo scopo di questo esercizio è imparare a cambiare variabili, e non a trovare il modo più veloce per calcolare un integrale...]

⊙ – **6**) Dimostrare che se un insieme E è trascurabile secondo Peano-Jordan, anche la sua chiusura è trascurabile.

Esercizio in realtà facilissimo: se possiamo ricoprire E con una famiglia finita di rettangoli (che possiamo prendere chiusi) di area totale minore di ϵ , la stessa famiglia ricopre anche $\bar{E}$...

⊙ – **7**) Dimostrare che per ogni funzione continua $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e per ogni (x, y) vale la formula

$$\int_0^1 dx \int_0^x f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_y^1 f(x, y) dx.$$

Il primo integrale è esattamente l'integrale di $f(x, y)$ sul triangolo T di vertici $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(1, 1)$. Se scambiamo l'ordine di integrazione (Fubini) integrando su T , prima rispetto a y e poi rispetto a x , otteniamo proprio il secondo integrale.

☺ – 8) Cambiare l'ordine di integrazione negli integrali seguenti (senza calcolarli, anche perché non è specificata la funzione...):

$$\int_0^4 dx \int_{3x^2}^{12x} f(x, y) dy, \quad \int_0^\pi dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy, \quad \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y) dx.$$

Anzitutto: fare un disegno del dominio su cui si chiede di integrare!

Il primo integrale è calcolato sulla zona di piano limitata compresa fra la retta $y = 12x$ e la parabola $y = 3x^2$. Scambiano l'ordine di integrazione si ottiene subito

$$\int_0^4 dx \int_{3x^2}^{12x} f(x, y) dy = \int_0^{48} dy \int_{y/12}^{\sqrt{y/3}} f(x, y) dx.$$

Il secondo integrale è esteso al sottografico del tratto di senoide fra $x = 0$ e $x = \pi$. Se esprimiamo questo dominio come dominio normale rispetto a y vediamo che chiaramente y varia fra 0 e 1, e per un y fissato x varia fra i due punti di intersezione della retta parallela all'asse delle ascisse (di ordinata y) con la senoide. Come possiamo descrivere questi punti in funzione di y ? Il primo punto è proprio $\arcsin y$; il secondo è evidentemente π meno il primo (simmetria della senoide) cioè $\pi - \arcsin y$. In conclusione

$$\int_0^\pi dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} f(x, y) dx.$$

Il terzo integrale è esteso ad un dominio composto dal quarto di cerchio unitario contenuto nel secondo quadrante, più il triangolo di vertici $(1, 0)$, $(0, 1)$ e $(0, 0)$. Se scambiamo l'ordine di integrazione otteniamo facilmente

$$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y) dx = \int_{-1}^0 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x, y) dy$$

(spezzando in un integrale sul quarto di cerchio, più un integrale sul triangolo).

☹☹ – 9) Sia Q il quadrato $[0, 1] \times [0, 1]$ e $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \text{ è razionale,} \\ 2y & \text{se } x \text{ è irrazionale.} \end{cases}$$

(i) Dimostrare che l'integrale $\int_0^t f(x, y) dy$ esiste per ogni $0 \leq t \leq 1$ e che

$$\int_0^1 \left(\int_0^t f(x, y) dy \right) dx = t^2, \quad \int_0^1 \left(\int_0^t f(x, y) dy \right) dx = t.$$

Quindi in particolare l'integrale iterato $\int_0^1 (\int_0^1 f(x, y) dy) dx$ esiste e vale 1.

(ii) Dimostrare che l'integrale $\int_0^1 (\int_0^1 f(x, y) dx) dy$ esiste e calcolarne il valore.

(iii) Dedurre che f non è integrabile su Q .

(i) Fissato x , la funzione $f(x, y)$ è o costante oppure uguale a $2y$, in ogni caso continua in y e possiamo integrarla fra 0 e t ottenendo la funzione $g(x, t) = \int_0^t f(x, y) dy$ che vale

$$g(x, t) = \begin{cases} t & \text{se } x \text{ è razionale,} \\ t^2 & \text{se } x \text{ è irrazionale.} \end{cases}$$

Ora, fissato t , proviamo a calcolare l'integrale inferiore e superiore di $g(x, t)$ rispetto a x su $[0, 1]$; chiaramente dato che $g(x, t) = t^2$ oppure t su un insieme denso, esattamente come per la funzione di Dirichlet otteniamo che

$$\int_0^1 g(x, t) dx = t^2, \quad \overline{\int_0^1 g(x, t) dx} = t.$$

Questi due numeri coincidono quando $t = 1$; dunque se $t = 1$ la funzione $g(x, 1)$ è integrabile in x e il suo integrale vale 1.

(ii) Fissato y , la funzione $f(x, y)$ è discontinua su un insieme denso di punti, e come la funzione di Dirichlet assume solo due valori: 1 e $2y$. Notare che il più grande di questi valori è 1 quando $y \leq 1/2$, e $2y$ quando $y \geq 1/2$. Allora come per la funzione di Dirichlet otteniamo subito

$$\int_0^1 f(x, y) dx = 1 \quad \text{se } y \leq 1/2, \quad \overline{\int_0^1 f(x, y) dx} = 2y \quad \text{se } y \geq 1/2,$$

Dunque la funzione di y data da $\int_0^1 f(x, y) dx$ è continua in y , quindi integrabile, e abbiamo subito

$$\int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx = \int_0^{1/2} dy + \int_{1/2}^1 2y dy = \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{4} = \frac{5}{4}.$$

(iii) Il Lemma di Fubini (vedi dispense) afferma che per ogni funzione limitata $f(x, y)$ e ogni partizione P di $[0, 1]^2$

$$\underline{s}(f, P) \leq \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dy \right) dx \leq \overline{\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dy \right) dx} \leq \overline{s}(f, P).$$

Naturalmente vale anche la disuguaglianza analoga per gli integrali iterati nell'ordine inverso. Allora dal risultato del punto (i) deduciamo che

$$\underline{s}(f, P) \leq 1$$

mentre dal risultato del punto (ii) deduciamo che

$$\frac{5}{4} \leq \overline{s}(f, P).$$

Vediamo quindi che il criterio di integrabilità è violato e la funzione non è integrabile su $[0, 1]^2$.

☺ – 10) Calcolare

$$\int_{\Sigma} (x^2 + y^2)^2 d\sigma,$$

dove Σ è la parte della superficie $z = (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}$ delimitata dai piani $z = 1$ e $z = 2$.

Innanzitutto, detta $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}$, si ha

$$|\nabla f|^2 = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Inoltre, dovendo essere z compresa tra 1 e 2, si ha $\frac{1}{4} \leq x^2 + y^2 \leq 1$. Pertanto,

$$\int_{\Sigma} (x^2 + y^2)^2 d\sigma = \iint_{\frac{1}{4} \leq x^2 + y^2 \leq 1} (x^2 + y^2)^2 \sqrt{1 + \frac{1}{(x^2 + y^2)^2}} dx dy = \iint_{\frac{1}{4} \leq x^2 + y^2 \leq 1} (x^2 + y^2) \sqrt{1 + (x^2 + y^2)^2} dx dy.$$

Passando a coordinate polari, si tratta di calcolare

$$\int_0^{2\pi} \int_{\frac{1}{2}}^1 \rho^2 \sqrt{1 + \rho^4} \rho d\rho = 2\pi \left(\frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{17\sqrt{17}}{384} \right).$$

⊙ – **11)** Calcolare l'area della superficie $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{6}$ al variare di (x, y) in

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1\}.$$

Detta $f(x, y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{6}$, si ha $|\nabla f|^2 = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$, e quindi

$$A(\Sigma) = \iint_E \sqrt{1 + \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}} dx dy.$$

Effettuando il cambio di variabili $x = \rho \cos(\theta)/2$, $y = \rho \sin(\theta)/3$, il cui determinante vale $\rho/6$, si ha

$$A(\Sigma) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1 + \rho^2} \rho d\rho d\theta = 2\pi \frac{\sqrt{8} - 1}{3}.$$

⊙ – **12)** Calcolare l'area della superficie $y^2 + z^2 = 6x$, delimitata dal piano $x = 3$ ed esterna al cilindro di equazione $y^2 = 3x$.

Ci interessa sapere come devono variare y e z per ottenere la superficie che ci interessa. Ora, la parte esterna al cilindro $y^2 = 3x$ è caratterizzata dall'avere $y^2 \leq 3x$; pertanto, sostituendo nella relazione $y^2 + z^2 = 6x$, si trova che deve essere $y^2 \leq z^2$, e quindi $|y| \leq |z|$. Inoltre, se $x \leq 3$, allora $y^2 + z^2 \leq 18$.

In definitiva, dal momento che $|\nabla f|^2 = \frac{y^2 + z^2}{9}$, si ha, detto

$$E = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y^2 + z^2 \leq 18, |y| \leq |z|\},$$

$$A(\Sigma) = \frac{1}{3} \iint_E \sqrt{9 + y^2 + z^2} dy dz.$$

Passando a coordinate polari,

$$A(\Sigma) = \frac{4}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sqrt{18}} \rho \sqrt{9 + \rho^2} d\rho d\theta = \frac{\pi}{4} (9\sqrt{3} - 12).$$

⊙ – **13)** Calcolare

$$\int_{\gamma} \left(\frac{2x}{1 + (x^2 + y)^2} + \frac{1}{2\sqrt{10 + x}} \right) dx + \frac{1}{1 + (x^2 + y)^2} dy$$

dove γ indica l'arco più lungo dell'ellisse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ compreso tra $A = (-3, 0)$ e $B = (0, 2)$, (cioè γ passa per $(0, -2)$ e $(3, 0)$).

In tal caso si può sia parametrizzare la curva $(x(t), y(t)) = (3 \cos t, 2 \sin t)$, $t \in [\pi, \frac{5}{2}\pi]$, e calcolare esplicitamente l'integrale che (osservando che la forma differenziale è chiusa nel dominio semplicemente connesso $\{x > -10\}$, e quindi ivi esatta, essendo inoltre l'ellisse contenuta nel dominio di esattezza della forma) calcolare l'integrale per il tramite di una primitiva $F(x, y)$. Utilizzeremo questa seconda possibilità.

Dal fatto che $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{1 + (x^2 + y)^2}$ segue che $F(x, y) = \arctan(x^2 + y) + g(x)$, e quindi che $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2x}{1 + (x^2 + y)^2} + g'(x)$, poiché per definizione quest'ultimo deve essere uguale a $\frac{2x}{1 + (x^2 + y)^2} + \frac{1}{2\sqrt{10 + x}}$ ne segue che $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{10 + x}}$ e quindi che $g(x) = \sqrt{10 + x}$. Da ciò segue che una primitiva della forma differenziale è $F(x, y) = \arctan(x^2 + y) + \sqrt{10 + x}$, e l'integrale diventa uguale a $F(0, 2) - F(-3, 0) = \arctan(2) + \sqrt{10} - \arctan(9) - \sqrt{7}$.

⊙⊙ – **14)** Calcolare l'integrale della forma

$$\omega = (y^2 e^{xy^2} - \sin(x - y) + 1) dx + (2xy e^{xy^2} + \sin(x - y) + x) dy$$

sulla curva $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ percorsa in senso antiorario. (Suggerimento: pensare ω come somma di tre forme differenziali)

Scriviamo $\omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$ dove $\omega_1 = y^2 e^{xy^2} dx + 2xye^{xy^2} dy$, $\omega_2 = -\sin(x-y) dx + \sin(x-y) dy$ ed $\omega_3 = dx + xdy$. Si verifica facilmente che ω_1 ed ω_2 sono forme differenziali chiuse in $\mathbb{R}^2$ e quindi esatte (di primitive rispettivamente e^{xy^2} e $\cos(x-y)$, quindi il loro integrale sulla curva chiusa assegnata è zero. Resta da calcolare l'integrale sulla curva di ω_3 (che non è invece una forma differenziale esatta). La curva può essere così parametrizzata $(x(t), y(t)) = (\cos t, 2 \sin t)$ per $t \in [0, 2\pi]$; si tratta quindi di calcolare:

$$\int_0^{2\pi} (-\sin t + 2 \cos^2 t) dt = (\cos t + \sin t \cos t + t) \Big|_0^{2\pi} = 2\pi .$$

☺ – 15) Calcolare:

$$\iint_T x \sin^2(x+y) dx dy ,$$

dove $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0, |x+y| \leq \frac{\pi}{2}\}$.

$$\begin{aligned} \iint_T x \sin^2(x+y) dx dy &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 dx \int_{-x-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}-x} x \sin^2(x+y) dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 x(y - \sin(x+y) \cos(x+y)) \Big|_{-x-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}-x} dx = \frac{\pi}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 x dx = \\ &= \frac{\pi}{2} \frac{x^2}{2} \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^0 = -\frac{\pi^3}{16} . \end{aligned}$$

☺ – 16) Calcolare:

$$\iint_T |x+y| e^{x-y} dx dy ,$$

dove T è il triangolo di vertici $(0, 0)$, $(1, 1)$ e $(1, -2)$.

$$\begin{aligned} \iint_T |x+y| e^{x-y} dx dy &= \int_0^1 dx \int_{-x}^x (x+y) e^{x-y} dy + \int_0^1 dx \int_{-2x}^{-x} -(x+y) e^{x-y} dy = \\ &= \int_0^1 e^x dx \int_{-x}^x (xe^{-y} + ye^{-y}) dy + \int_0^1 e^x dx \int_{-2x}^{-x} -(xe^{-y} + ye^{-y}) dy \end{aligned}$$

poiché per parti si ha che $\int ye^{-y} dy = -e^{-y}y - \int -e^{-y} dy = -e^{-y}(y+1)$, l'integrale assegnato diventa:

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 e^x (-xe^{-y} - e^{-y}(y+1)) \Big|_{-x}^x dx + \int_0^1 e^x (xe^{-y} + e^{-y}(y+1)) \Big|_{-2x}^{-x} dx = \\ &= \int_0^1 [-2x - 1 + e^{2x}] dx + \int_0^1 [e^{2x} + e^{3x}(x-1)] dx = \left(-x^2 - x + e^{2x} + \frac{e^{3x}}{3}(x-1) - \frac{e^{3x}}{9} \right) \Big|_0^1 = \\ &= -2 + e^2 - \frac{e^3}{9} - 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = e^2 - \frac{e^3 + 23}{9} . \end{aligned}$$

☺ – 17) Calcolare:

$$\iint_D e^{x^2+y^2-\arctan \frac{y}{x}} dx dy ,$$

dove $D = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2, x \geq 0, y \geq 0\}$.

In coordinate polari l'integrale si riscrive nel modo seguente:

$$\int_1^2 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\rho^2-\theta} \rho d\theta = \left(\int_1^2 \rho e^{\rho^2} d\rho \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\theta} d\theta \right) =$$

$$= \frac{e^{\rho^2}}{2} \Big|_1^2 \frac{e^{-\theta}}{-1} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{e^4 - e}{2} (1 - e^{-\frac{\pi}{2}}) .$$

⊙ – **18**) Data la funzione $u(x, y) \in C^2(A)$, armonica in $A \subseteq \mathbb{R}^2$, determinare una funzione olomorfa $f(x + iy)$ in A , la cui parte reale è proprio $u(x, y)$, nei seguenti casi ⊙ – i) $u(x, y) = 3x + 2y$ ed $A = \mathbb{R}^2$ ⊙⊙– ii) $u(x, y) = 3 \ln(\sqrt{x^2 + y^2})$ ed $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\} \setminus \{x \geq 0, y \leq 0\}$ (Suggerimento: Si ricordi che $f(x + iy) := u(x, y) + iv(x, y)$, dove $v(x, y)$ è una primitiva della forma differenziale $-u_y(x, y)dx + u_x(x, y)dy$).

(i) In questo caso dato che $u_y = 2$ ed $u_x = 3$ si tratta di trovare semplicemente una primitiva della forma differenziale $-2dx + 3dy$, che è per esempio $v(x, y) = -2x + 3y$. Abbiamo così definito la funzione olomorfa $f(z) = f(x + iy) = 3x + 2y + i(-2x + 3y) = (3 - 2i)z$, per ogni $z \in \mathbb{C}$.

(ii) In questo caso dato che $u_y = \frac{3y}{x^2 + y^2}$ ed $u_x = \frac{3x}{x^2 + y^2}$ si tratta di trovare una primitiva della forma differenziale $-\frac{3y}{x^2 + y^2}dx + \frac{3x}{x^2 + y^2}dy$. Per definizione si deve avere

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{3x}{x^2 + y^2} = \frac{3}{x} \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \text{ per } x \neq 0$$

quindi integrando nella variabile y l'uguaglianza sopra scritta si ha $v(x, y) = 3 \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + g(x)$, da cui segue che:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{3y}{x^2 + y^2} + g'(x)$$

che per definizione deve essere uguale a $-\frac{3y}{x^2 + y^2}$, quindi $g'(x) = 0$ e $v(x, y) = 3 \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + C$ per $x \neq 0$. Purtroppo il nostro dominio interseca l'asse y quindi cio' non basta a definire completamente v , la costante C dovrà essere definita in modo opportuno nei tre domini in cui scompongo A , $A = A_1 \cup A_2 \cup \gamma$, dove $A_1 = A \cap \{x > 0, y > 0\}$, $A_2 = A \cap \{x < 0\}$ e $\gamma = A \cap \{x = 0\}$. In particolare la funzione v può essere definita nel modo seguente:

$$v(x, y) = \begin{cases} 3 \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{in } A_1 \\ 3\frac{\pi}{2} & \text{su } \gamma \\ 3 \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 3\pi & \text{in } A_2 \end{cases}$$