SVILUPPI DI TAYOR E o PICCOLI

PIERO D'ANCONA

1. DEFINIZIONE DI $o(g)$

Se g è una funzione definita su un intervallo aperto contenente x_0 , indichiamo con $o(g)$ per $x \rightarrow x_0$ l'insieme di tutte le funzioni $f(x)$, definite per x vicino x_0 , tali che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

In questo caso si dice che f è un *o piccolo* di g per $x \rightarrow x_0$, e si scrive $f \in o(g)$ o anche $f = o(g)$. Quindi le funzioni $o(g)$ sono quelle che *tendono a zero più velocemente di g* per $x \rightarrow x_0$. Nel caso delle potenze, quando $f \in o(x^N)$ si dice anche che f è un *infinitesimo di ordine superiore a N* . Analoghe definizioni per $x \rightarrow x_0^\pm$, $x \rightarrow \pm\infty$. Ad esempio:

$$x^3 \in o(x^2) \text{ per } x \rightarrow 0 \text{ ma } x^3 \notin o(x^3)$$

$$x \in o(1) \text{ per } x \rightarrow 0$$

$$2o(x^2) = o(x^2) = -o(x^2)$$

In generale:

- (1) $f \in o(1)$ per $x \rightarrow x_0$ vuol dire semplicemente che $f \rightarrow 0$ per $x \rightarrow x_0$
- (2) $x^p \in o(x^q)$ per $x \rightarrow 0$ se $p, q \in \mathbb{N}$ con $p > q$, ma $x^p \notin o(x^p)$
- (3) $o(x^p) \subseteq o(x^q)$ per $x \rightarrow 0$ se $p, q \in \mathbb{N}$ con $p \geq q$
- (4) $o(g) = -o(g) = 2 \cdot o(g)$

Notare che nella pratica di solito si fa un piccolo abuso di notazione:

$$\text{invece di scrivere } x^3 \in o(x^2), \text{ si scrive } x^3 = o(x^2).$$

In questo modo le formule sono molto più leggibili, ma bisogna fare attenzione a non fare confusione. Per esempio,

$$o(x) - o(x) \text{ non è uguale a zero!}$$

Infatti i due $o(x)$ indicano due funzioni infinitesime di ordine superiore a 1, anche diverse fra loro (la notazione rigorosa sarebbe $o(x) - o(x) \subseteq o(x)$).

2. SVILUPPI DI TAYLOR

Esempio fondamentale: il resto di Taylor R_N di $f(x)$ nel punto x_0

$$R_N(x) := f(x) - P_N(x), \quad P_N(x) := \sum_{k=0}^N \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

è un infinitesimo di ordine superiore a N per $x \rightarrow x_0$. Infatti si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_N(x)}{(x - x_0)^N} = 0 \quad \text{cioè} \quad R_N \in o((x - x_0)^N) \text{ per } x \rightarrow x_0,$$

anzi il polinomio di Taylor P_N in x_0 è definito proprio come l'unico polinomio P tale che $f - P \in o((x - x_0)^N)$ per $x \rightarrow x_0$. Ricordiamo i principali sviluppi in $x_0 = 0$:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^N}{N!} + o(x^N)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2k+2})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2k+1})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{N+1} \frac{x^N}{N} + o(x^N)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2k+2})$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \dots + \binom{\alpha}{N}x^N + o(x^N)$$

dove per $\alpha \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{N}$ si definisce $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$. Notare che $\binom{\alpha}{k} = 0$ se $\alpha \in \mathbb{N}$ e $0 < \alpha < k$, quindi in questo caso riotteniamo la formula per la potenza di un binomio.

Vediamo già qui quanto sia comodo l'abuso di notazione degli o piccoli: ad esempio invece di scrivere la formula poco maneggevole

$$e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} \in o(x^2)$$

scriviamo la formula

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

che è molto più comoda da usare nei calcoli (basta non sbagliare ad usarla...)

3. ARITMETICA DEGLI o PICCOLI

Le regole di calcolo per gli o piccoli sono semplicissime e forniscono uno strumento efficace per il calcolo di molti limiti. Dimostrare per esercizio le seguenti formule, nelle quali naturalmente tutti gli o piccoli si riferiscono allo stesso punto $x \rightarrow x_0$ e tutte le funzioni hanno limite per $x \rightarrow x_0$:

- (1) $f \cdot o(g) \subseteq o(f \cdot g)$ (vuol dire: se $\phi \in o(g)$, allora $f \cdot \phi \in o(fg)$)
- (2) $o(f) \cdot o(g) \subseteq o(f \cdot g)$ (vuol dire: se $\phi \in o(f)$ e $\psi \in o(g)$, allora $\phi \cdot \psi \in o(fg)$)

Quindi ad esempio se $p, q \in \mathbb{N}$

$$x^p \cdot o(x^q) \subseteq o(x^{p+q}), \quad o(x^p) \cdot o(x^q) \subseteq o(x^{p+q})$$

e inoltre

$$o(x)^q \subseteq o(x^q), \quad o(x^p)^q \subseteq o(x^{pq}).$$

Se invece sommiamo due o piccoli, il risultato sarà sempre l' o piccolo di ordine più basso. Dimostrare per esercizio le formule seguenti, per $x \rightarrow 0$:

- (3) se $p, q \in \mathbb{N}$ e $p > q$ allora $x^p + o(x^q) \subseteq o(x^q)$
- (4) se $p, q \in \mathbb{N}$ e $p \geq q$ allora $o(x^p) + o(x^q) \subseteq o(x^q)$

(la seconda vuol dire: se $f \in o(x^p)$ e $g \in o(x^q)$ allora $f + g \in o(x^q)$). Sono necessarie anche alcune regole di calcolo per funzioni composte. Dimostrare per esercizio le formule seguenti:

- (5) $o(o(g)) \subseteq o(g)$ (vuol dire: se $f \in o(g)$ e $\phi \in o(f)$ allora $\phi \in o(g)$)
- (6) $o(x^p + o(x^p)) \subseteq o(x^p)$ per $x \rightarrow 0$ se $p \geq 0$.

Ad esempio, l'ultima formula si dimostra così: se $\phi \in o(x^p)$ e $f \in o(x^p + \phi)$ allora

$$\frac{f}{x^p} = \frac{f}{x^p + \phi} \cdot \frac{x^p + \phi}{x^p} = \frac{f}{x^p + \phi} \cdot \left(1 + \frac{\phi}{x^p}\right) \rightarrow 0 \cdot (1 + 0) = 0$$

quindi $f \in o(x^p)$.

ESEMPI DI CALCOLO CON GLI o PICCOLI. Possiamo scrivere, per $x \rightarrow 0$,

$$(x^2 + o(x^2))^3 = x^6 + 3x^4o(x^2) + 3x^2o(x^2)^2 + o(x^2)^3 = x^6 + o(x^6) + o(x^6) + o(x^6) = x^6 + o(x^6)$$

oppure

$$(1 + x + o(x)) \cdot (x + o(x)) = x + o(x) + x^2 + xo(x) + xo(x) + o(x)^2 = x + o(x).$$

Nel secondo esempio, dato che compare un termine $o(x)$, tutti gli ordini superiori (che in questo caso sono x^2 e $o(x^2)$) vengono assorbiti da $o(x)$.

4. PRATICA DI CALCOLO

ESERCIZIO 1. Calcolare P_3 in $x_0 = 0$ per la funzione $f(x) = \ln(1 - \sin^2 x)$.

[Proviamo a utilizzare lo sviluppo $\sin x = x + o(x^2)$; se questo non è sufficiente, proveremo poi ad utilizzare un termine in più dello sviluppo di Taylor. Otteniamo

$$\sin^2 x = (x + o(x^2))^2 = x^2 + 2x \cdot o(x^2) + o(x^2)^2 = x^2 + o(x^3).$$

Fino a che ordine dobbiamo sviluppare $\ln$? Proviamo con $\ln(1 + y) = y + o(y)$, sostituendo $y = -\sin^2 x = -x^2 + o(x^3)$ otteniamo

$$f(x) = -x^2 + o(x^3) + o(-x^2 + o(x^3)) = -x^2 + o(x^2).$$

Non basta! questo conto dimostra solo che $P_2 = -x^2$ (perché il resto che abbiamo ottenuto è solo $o(x^2)$). Proviamo con un termine in più ossia $\ln(1 + y) = y - \frac{y^2}{2} + o(y^2)$; sostituendo $y = -\sin^2 x = -x^2 + o(x^3)$ otteniamo

$$f(x) = -x^2 + o(x^3) - \frac{1}{2}(-x^2 + o(x^3))^2 + o((x^2 + o(x^3))^2).$$

I termini $(-x^2 + o(x^3))^2 = x^4 + o(x^5)$ e $o((x^2 + o(x^3))^2) = o(x^4)$ sono assorbiti da $o(x^3)$ e in conclusione

$$f(x) = -x^2 + o(x^3).$$

Questa formula implica $P_3(x) = -x^2$

ESERCIZIO 2. Calcolare P_3 in $x = 0$ per $f(x) = \frac{1}{1+2x+2x^3}$. [$P_3 = 1 - 2x + 4x^2 - 10x^3$]

ESERCIZIO 3. Calcolare P_3 in $x = 0$ per $f(x) = \ln(e^x - x)$. [$P_3 = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$]

ESERCIZIO 4. Calcolare P_3 in $x = 0$ per $f(x) = \sin x \cdot (e^x - \cos^2 x)$. [$P_3 = x^2 + \frac{3}{2}x^3$]

ESERCIZIO 5. Calcolare $f^{(4)}(0)$ per $f(x) = e^x \sin x$.

[Invece di calcolare la derivata quarta e poi porre $x = 0$, è più rapido scrivere

$$f(x) = (1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^2)) \cdot (x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)) = x + x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{6} + o(x^4)$$

da cui

$$f(x) = x + x^2 + \frac{x^3}{6} + o(x^4).$$

Quindi $P_4 = x + x^2 + \frac{x^3}{6}$ il che vuol dire $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 2$, $f'''(0) = 1$ e $f^{(4)}(0) = 0$]

ESERCIZIO 6. Calcolare $f^{(4)}(0)$ per $f(x) = \sqrt[5]{1 + 2x^2 + x^3}$. [$f^{(4)}(0) = -\frac{192}{25}$]

ESERCIZIO 7. Calcolare $f^{(4)}(0)$ per $f(x) = (\cos(\sin x))^{1/3}$. [$f^{(4)}(0) = 1$]

ESERCIZIO 8. Usando Taylor, calcolare $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x - \cos x}{e^{x^2} - e^{x^3}}$.

[Si ha $e^x - \sin x - \cos x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - x + o(x^2) - 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3) = x^2 + o(x^2)$ e per il denominatore, sostituendo in $e^y = 1 + y + o(y)$ prima $y = x^2$ e poi $y = x^3$, $e^{x^2} - e^{x^3} = 1 + x^2 + o(x^2) - 1 - x^3 + o(x^3) = x^2 + o(x^2)$. Quindi il limite cercato diventa

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(1 + \frac{o(x^2)}{x^2})}{x^2(1 + \frac{o(x^2)}{x^2})} = 1.$$

Il limite si può calcolare anche usando il Teorema di de l'Hospital]

ESERCIZIO 9. Usando Taylor, calcolare $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \ln(\cos x)}{x \sin x}$.

[Scriviamo $\ln(\cos x) = \ln(1 + \cos x - 1)$, e usiamo $\ln(1 + y) = y - \frac{y^2}{2} + o(y^2)$ con $y = \cos x - 1 = -\frac{x^2}{2} + o(x^3)$, da cui

$$\ln(\cos x) = -\frac{x^2}{2} + o(x^3) - \frac{1}{2}(-\frac{x^2}{2} + o(x^3))^2 + o((- \frac{x^2}{2} + o(x^3))^2) = -\frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

e quindi $\sin x - \log(\cos x) = x + o(x^2) + \frac{x^2}{2} + o(x^3) = x + o(x^2)$. Invece per il denominatore basta scrivere $x \sin x = x(x + o(x^2)) = x^2 + o(x^3)$. In conclusione il limite diventa

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + o(x^2)}{x^2 + o(x^3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{o(x^2)}{x}}{x(1 + \frac{o(x^3)}{x^2})}$$

e questo limite non esiste perché vale $+\infty$ per $x \rightarrow 0^+$ e $-\infty$ per $x \rightarrow 0^-$]

ESERCIZIO 10. Usando Taylor, calcolare $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2) - \ln(\cos x)}{x \sin x}$. [= $\frac{3}{2}$]

ESERCIZIO 11. Usando Taylor, calcolare $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{x}{2} \sin x}{(\ln(1+x))^4}$. [= $-\frac{1}{24}$]

ESERCIZIO 12. Usando Taylor, calcolare $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln(1+x))^3}{\cos x \cdot \sin^2 x - x^2}$. [= 0]

ESERCIZIO 13. Usando Taylor, calcolare $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2} \cdot e^{-x}$.
[Scriviamo

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2} \cdot e^{-x} = \exp[x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - x]$$

e usando $\ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + o(y^2)$

$$x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - x = x^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) - x = -\frac{1}{2} + \frac{o(1/x^2)}{1/x^2} \rightarrow -\frac{1}{2}$$

quindi il limite cercato è $e^{-1/2}$]

ESERCIZIO 14. Usando Taylor, calcolare $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}$.

$$\left[(\cos x)^{\frac{1}{\sin x}} = \exp\left[\frac{\log(\cos x)}{\sin x}\right] \rightarrow 1\right]$$

ESERCIZIO 15. Per quali valori di a, b, c esiste il $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - a - bx}{\sin x - cx}$?

$$\left[\frac{e^x - a - bx}{\sin x - cx} = \frac{(1-a) + (1-b)x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{(1-c)x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}\right]. \text{ Se } a \neq 1 \text{ il limite per } x \rightarrow 0^\pm \text{ è } \pm\infty \text{ o } \mp\infty, \text{ quindi in questo caso}$$

il limite per $x \rightarrow 0$ non esiste. Dunque deve essere $a = 1$. Se $c \neq 1$ il limite esiste ed è $\frac{1-b}{1-c}$. Se $c = 1$ il limite non esiste per qualunque valore di b . In conclusione il limite esiste se e solo se $a = 1, c \neq 1$]