Analisi II, a.a. 2017–2018 – Secondo esonero

17 gennaio 2018

1) – (Vero/Falso $4 \times 2 = 8$ punti). Sia ω la forma differenziale su $\mathbb{R}^2$

$$\omega(x,y) = (\phi(y) - y^2)\, dx + (\phi(y)(x+1) - 2xy)\ dy.$$

Dire se sono vere o false le seguenti affermazioni:

A) Se $\phi(y) = 1$ la forma ω è chiusa su $\mathbb{R}^2$	$\boxed{\text{V}}$	$\boxed{\text{F}}$
B) Se $\phi(y) = e^y$ la forma ω è esatta su $\mathbb{R}^2$	$\boxed{\text{V}}$	$\boxed{\text{F}}$
C) Se $\phi(y) = -e^y$ la forma ω è esatta su $\mathbb{R}^2$	$\boxed{\text{V}}$	$\boxed{\text{F}}$
D) Se $\phi(y) = e^y$ si ha $\int_\gamma \omega = 1$ dove $\gamma(t) = (1+\cos t, \sin t)$, $t \in [0,\pi]$	$\boxed{\text{V}}$	$\boxed{\text{F}}$

2) – (Vero/Falso $4 \times 2 = 8$ punti). Siano D ed $f(x,y)$ il dominio e la funzione

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \le y \le 1,\ y \le x,\ y \ge x-1\right\}, \qquad f(x,y) = xe^y.$$

Dire se sono vere o false le seguenti affermaazioni:

A) Il dominio D è in forma normale rispetto a x	$\boxed{\text{V}}$	$\boxed{\text{F}}$
B) La funzione f è misurabile	$\boxed{\text{V}}$	$\boxed{\text{F}}$
C) L'integrale di f su D è finito	$\boxed{\text{V}}$	$\boxed{\text{F}}$
D) L'integrale di f su D è uguale a $\frac{1}{2}$	$\boxed{\text{V}}$	$\boxed{\text{F}}$

3) – (8 punti). Si consideri la forma differenziale su $\mathbb{R}^2$

$$\omega(x,y) = \left(\alpha y - 2x^2 + 2y^2\right)\ dx + (\alpha^2 x + 4xy)\, dy, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

(i) Per quali valori dil $\alpha \in \mathbb{R}$ la forma è chiusa su $\mathbb{R}^2$?
(ii) Per quali valori dil $\alpha \in \mathbb{R}$ la forma è esatta su $\mathbb{R}^2$?
(iii) Per i valori di α per cui la forma è esatta, trovare tutte le primitive.
(iv) Per $\alpha = 1$, calcolare $\int_\gamma \omega$ dove $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0,\pi]$.

4)– (8 punti). Calcolare l'integrale

$$\iint_D \left(1 + \frac{x}{y^2} + \frac{1}{y}\right)\ dx\, dy$$

sul dominio

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ 1 \le x^2 + y^2 \le 4, \quad y \ge |x|\}.$$