ANALISI II MAT - 2017/2018 - Canale A/L
Canale M/Z
I esonero 16 novembre 2017

---

(1) $f(x,y) = \tan(x)e^{xy} + x^7 - 3xy$. $\rightsquigarrow f(x,y)=0$

$Df = \left(\frac{e^{xy}}{\cos^2 x} + y e^{xy}\tan x + 7x^6 - 3y,\ x e^{xy}\tan(x) - 3x\right)$

$f(0,0)=0$, $Df(0,0)=(1,0)$ $\quad f(\pi/4,0)\neq 0$,

$f(0,1)=0$, $Df(0,1)=(-2,0)$ $\quad f(0,-1)=0$, $Df(0,-1)=(4,0)$.

- DINI si può appl. $\sim(0,0)$ $\boxed{V}$
- DINI " " " $\sim(0,1)$ $\boxed{V}$
- DINI $\sim(\frac{\pi}{4},0) \Rightarrow y=\varphi(x)$, $\varphi'(\pi/4)=0$ $\boxed{F}$
- DINI $\sim(0,-1) \Rightarrow x=\varphi(y)$ e $\varphi'(-1)=0$ $\boxed{V}$

---

(2) $f(x,y) = 3x^2y - 3xy^2 + 27x$ (MAX/MIN)

$Df = (6xy - 3y^2 + 27,\ 3x^2 - 6xy)$

PTI STAZ: $(0,3)$ e $(0,-3)$

$Hf(0,3) = \begin{pmatrix} 18 & -18 \\ -18 & 0 \end{pmatrix}$ det <0 SELLA

$Hf(0,-3) = \begin{pmatrix} -18 & 18 \\ 18 & 0 \end{pmatrix}$ det <0 SELLA

- f ha ! PTO STAZ. $\boxed{F}$
- f ha 2 PTI STAZ. $\boxed{V}$
- f ha MIN in $(0,0)$ $\boxed{F}$
- f ha MAX in $(0,3)$ $\boxed{F}$

---

(3) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\log(\alpha + x^2y^2)}{x^2+y^2} & (x,y)\neq 0 \\ 0 & \text{in } 0 \end{cases}$

(i) $f \in C, D, d$ in $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$?

Fuori dall'origine, f è combinazione di funzioni C^1 e ben definite $\Rightarrow f$ è $C^1(\mathbb{R}^2\setminus(0,0))$ (e in particolare è continua, derivabile, differenziabile).

(ii) $\alpha>0$, $\alpha\neq 1$. Studiare f in $(0,0)$

$f(x,0) = \begin{cases} \frac{\log(\alpha)}{x^2} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$

è DISCONTINUA ($\Rightarrow$ non DERIVABILE) in 0 $\Rightarrow$ f NON È C, deriv, diff. in $(0,0)$

(iii) $\alpha = 1$. Studiare f in $(0,0)$

f è CONTINUA in $(0,0)$: SI

$$\frac{\log(1+x^2y^2)}{x^2+y^2} = \begin{cases} 0 & \text{sugli assi} \\ \dfrac{\log(1+x^2y^2)}{x^2y^2} \cdot \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{fuori dagli assi} \end{cases}$$

e per $(x,y) \to 0$, $\left|\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right| \le \dfrac{r^4}{r^2} = r^2 \to 0$

mentre $\dfrac{\log(1+x^2y^2)}{x^2y^2} \to 1$.

f è DERIVABILE in $(0,0)$: SI $\quad \dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0 \Rightarrow D_1 f(0,0) = 0$

analogamente $D_2 f(0,0) = 0$.

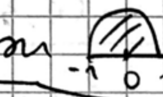
f è DIFFB in $(0,0)$: SI

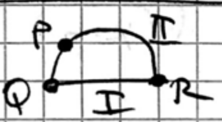
$$\frac{f(h,k)-f(0,0)-L(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{\log(1+h^2k^2)}{\sqrt{h^2+k^2}^{\,3}} =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } h=0 \text{ o } k=0 \\ \underbrace{\dfrac{\log(1+h^2k^2)}{h^2k^2}}_{\downarrow\, 1} \cdot \underbrace{\dfrac{h^2k^2}{\sqrt{h^2+k^2}^{\,3}}}_{} \end{cases} \qquad (r := \sqrt{h^2+k^2})$$

$$\left|\frac{h^2k^2}{\sqrt{}^{\,3}}\right| \le \frac{r^4}{r^3} = r \to 0$$

---

(4) MAX MIN ASS di $f(x,y) = 2x - y$ in  $= \{x^2+y^2 \le 1,\ y \ge 0\}$



$Df = (2,-1) \Rightarrow$ NO PTI STAZIONARI

BORDO I: $f(x,0) = 2x \Rightarrow$

MIN in $x=-1 \to (-1,0)$ $\quad f(-1,0) = -2$ $\quad$ Q

MAX in $x=1 \to (1,0)$ $\quad f(1,0) = 2$ $\quad$ R

BORDO II: ad es. LAGRANGIANA $G(x,y,\lambda) = 2x - y - \lambda(x^2+y^2-1)$

$$DG = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2-2\lambda x = 0 \\ -1-2\lambda y = 0 \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \lambda \ne 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1/\lambda \\ y = -1/2\lambda \\ \dfrac{1}{\lambda^2} + \dfrac{1}{4\lambda^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \lambda = \pm\frac{\sqrt5}{2}$$

$$\Rightarrow (x,y) = \begin{cases} (2/\sqrt5, -1/\sqrt5) \notin \mathrm{II} & \text{scartato} \\ (-2/\sqrt5, 1/\sqrt5) = P \in \mathrm{II} & \text{va bene} \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} f(-1,0) &= -2 \\ f(1,0) &= 2 \\ f(-2/\sqrt5, 1/\sqrt5) &= -\sqrt5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &\text{MIN ASS in } (-2/\sqrt5, 1/\sqrt5) = P \\ &\text{MAX ASS in } (1,0) = R \end{aligned}$$