$\boxed{\text{EDP}}$

PIERO D'ANCONA

Appunti del corso 2011-12 +13

<u>INTEGRARE CON</u> :

1) EVANS - PDE
2) BRÉZIS - Analyse Fonctionnelle
3) GILBARG-TRUDINGER (eq. ellittiche).

NOTAZIONI

Le derivate parziali di una funzione $u(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N$ si indicano in vari modi:

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = \partial_{x_j} u = \partial_j u = u_{x_j} = D_j u$$

La matrice JACOBIANA è la matrice delle derivate parziali:

$$\partial u = \begin{pmatrix} \partial_1 u_1 & \cdots & \partial_n u_1 \\ \vdots & & \\ \partial_1 u_N & \cdots & \partial_n u_N \end{pmatrix} = Du = \partial_x u = D_x u$$

Derivate di ordine superiore: per un multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ si scrive

$$\partial^\alpha u = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n} u = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n}} u = D^\alpha u = \partial_x^\alpha u$$

Per funzioni di una sola variabile si scrive anche u'.

Una EQUAZIONE alle DERIVATE PARZIALI è una relazione della forma

$$F(x, \{\partial^\alpha u\}_{|\alpha| \le m}) = 0$$

dove F è una funzione (a valori in $\mathbb{R}^k$) che dipende da $x \in \mathbb{R}^n$ e dai valori in x delle derivate parziali fino all'ordine m. ORDINE dell'equazione è l'ordine massimo delle derivate che compaiono nell'equazione.

Talvolta u (ed F) si considerano a VALORI COMPLESSI; caso per caso questo può dare luogo a fenomeni diversi.

EQ. del I ORDINE

Hanno la forma generale

(1) $\boxed{F(x, u, \partial u) = 0}$

dove $u : \Omega \to \mathbb{R}$, Ω aperto di $\mathbb{R}^n$, e F è una funzione di $2n+1$ variabili a valori reali.

(Sono molto studiati anche i SISTEMI di eq. del primo ordine, per i quali u è a valori in $\mathbb{R}^k$ e F a valori in $\mathbb{R}^\ell$; ma noi ci occuperemo solo del caso scalare cioè a valori reali).

Per le equazioni del tipo (1) si possono dare risultati piuttosto generali. Ci avvicineremo per gradi al caso generale cominciando dal caso più semplice.

EQUAZIONE del TRASPORTO

Ha la forma

$$\boxed{\begin{array}{ll} a \cdot \partial u = 0 & \text{(omogenea)} \\ a \cdot \partial u = f(x) & \text{(non omogenea)} \end{array}}$$

dove a è un vettore di $\mathbb{R}^n$ fissato, non nullo, $n \geq 2$, e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ con Ω aperto di $\mathbb{R}^n$.

A) IL CASO $n = 2$

(2) $\boxed{a u_x + b u_y = 0}$ $\qquad a, b \in \mathbb{R}, (a,b) \neq (0,0)$

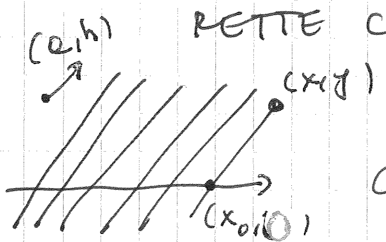
Cominciamo dal caso bidimensionale. La condizione (2) si può interpretare come

"la derivata di u nella direzione (a,b) è nulla"

cioè, "u è costante lungo le rette parallele a (a,b)".

Controlliamo: vediamo se esiste una curva $(x(t), y(t)) = \gamma(t)$ lungo la quale u è costante.

Posto
$$z(t) = u(\gamma(t)) = u(x(t), y(t))$$
vogliamo $z' = 0$ cioè
$$u_x \cdot x' + u_y \cdot y' = 0$$
e quindi basta porre (se u è soluzione di (2))
$$\begin{cases} x' = a \\ y' = b \end{cases} \Rightarrow z(t) = \text{cost}.$$
La soluzione è facilissima:
$$\begin{cases} x(t) = x_0 + at \\ y(t) = y_0 + bt \end{cases}$$
e quindi
$$z(t) = u(x_0 + at, y_0 + bt) = \text{cost}.$$
per ogni punto (x_0, y_0) fissato: cioè
$$u(x_0 + at, y_0 + bt) = u(x_0, y_0)$$
u costante lungo le rette $(x_0 + at, y_0 + bt)$ dette RETTE CARATTERISTICHE.



È naturale allora imporre il PROBLEMA di CAUCHY
$$\boxed{\begin{cases} a u_x + b u_y = 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases}} \qquad \varphi \in C^1$$
con una CONDIZIONE INIZIALE $\varphi(x)$ ad esempio nell'asse delle x. In questo modo la soluzione u esiste ed è unica, ed è di classe C^1.

Per calcolarla nel punto (x, y):

① trovo la retta caratteristica passante per (x,y):
$$\begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \end{cases}$$

② impongo che per $t = 0$ la retta passi nell'asse delle x, cioè $y_0 = 0$, e ottengo $\boxed{\text{SE } b \neq 0}$
$$t = y/b, \qquad x_0 = x - \quad at$$

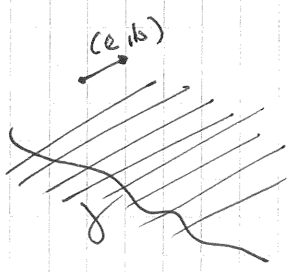
③ a questo punto, il valore di $u(x,y)$ è uguale al valore $u(x_0,0) \equiv \varphi(x_0)$ e quindi

$$u(x,y) = \varphi(x_0) = \varphi(x - a t)$$

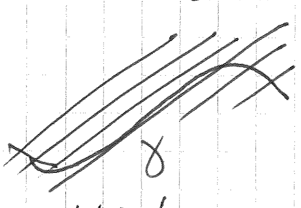
cioè

$$\boxed{u(x,y) = \varphi\left(x - \frac{a}{b} y\right)} \qquad (\text{se } b \neq 0).$$

OSS Perché serve l'ipotesi $b \neq 0$? Se $b=0$, le rette caratteristiche sono PARALLELE all'asse delle x, quindi non è possibile applicare il ragionamento precedente e calcolare $u(x,y)$ a partire dalla condiz. iniziale $u(x,0)=\varphi(x)$.



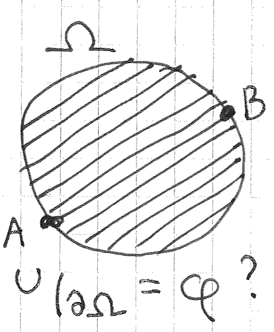
OSS Nessuno ci obbliga ad imporre il dato iniziale lungo l'asse delle x: se fissiamo una curva γ che sia TRASVERSALE alle rette caratteristiche, è chiaro che si può imporre $u|_\gamma = \varphi$ e determinare in modo unico i valori di u. Invece se γ è TANGENTE alle rette caratteristiche, è chiaro che ci sono problemi: u deve essere costante nelle rette, e quindi non possiamo imporre i valori di u arbitrariamente su γ.



NO!

OSS Per lo stesso motivo, è chiaro che il PROBLEMA al CONTORNO del tipo

$$\begin{cases} a u_x + b u_y = 0 & \text{su } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases}$$

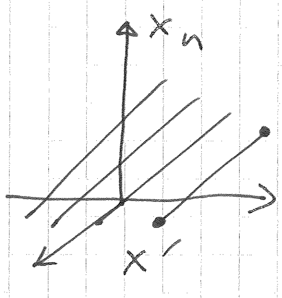


$u|_{\partial\Omega} = \varphi$?

(Ω aperto di $\mathbb{R}^2$) dà luogo a problemi: se una retta caratteristica tocca $\partial\Omega$ in due punti A e B, il dato dovrà avere lo stesso valore $\varphi(A) = \varphi(B)$, e non si può imporre arbitrariamente.

EQ. del TRASPORTO OMOGENEA su $\mathbb{R}^n$

Ripetiamo il procedimento nel caso generale $n \geq 2$ con dato iniziale sul piano $x_n = 0$ (usiamo la notazione $x = (x', x_n)$, $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$).



Il PROBLEMA di CAUCHY si scrive

$$\boxed{\begin{cases} a \cdot \partial u = 0 \\ u(x', 0) = \varphi(x') \end{cases}} \qquad \varphi \in C^1$$

dove $a \in \mathbb{R}^n$ è un vettore fissato con $\boxed{a_n \neq 0}$ (in modo che le rette caratteristiche siano TRASVERSALI al piano dei dati iniziali $x_n = 0$). La soluzione unica si scrive, come prima $(a = (a', a_n))$,

$$\boxed{u(x) = \varphi\left(x' - \frac{a'}{a_n} x_n\right)}$$

EQ. del TRASPORTO NON OMOGENEA $n=2$

Torniamo al caso $n=2$ per adattare il metodo precedente:

$$\boxed{\begin{cases} a u_x + b u_y = f(x,y) \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases}}$$

dove $a, b \in \mathbb{R}$ con $\boxed{b \neq 0}$ e $\boxed{f, \varphi \in C^1}$.

Rette caratteristiche: come prima

$$\begin{cases} x' = a \\ y' = b \end{cases} \quad \text{con il punto iniziale (nell'asse delle } x\text{)} \quad \begin{cases} x(0) = x_0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + at \\ y(t) = bt \end{cases}$$

Ora però u NON È COSTANTE sulle rette caratteristiche: posto $z(t) = u(x(t), y(t))$:

$$z'(t) = a u_x + b u_y = f(x(t), y(t)).$$

In altri termini, anche se u non è costante lungo le caratteristiche, il suo valore si può determinare utilizzando SOLO i VALORI di f LUNGO le rette CARATTERISTICHE: basta integrare da 0 a t:

$$z(t) = z(0) + \int_0^t f(x(\sigma), y(\sigma))\, d\sigma$$

Per ottenere una formula esplicita, ricaviamo come prima t e x_0 a partire dal punto (x,y):

$$\begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt \end{cases} \iff \begin{cases} x_0 = x - \frac{a}{b} y \\ t = y/b \end{cases}$$

e osserviamo che

$$z(0) = u(x_0, 0) = \varphi(x_0)$$

SOSTITUENDO, $z(t) = u(x,y)$ è uguale a

$$\boxed{u(x,y)} = \varphi(x_0) + \int_0^t f(a\sigma + x_0, b\sigma)\, d\sigma$$

$$= \boxed{\varphi\left(x - \frac{a}{b} y\right) + \int_0^{y/b} f\left(a\sigma + x - \frac{a}{b} y, b\sigma\right) d\sigma}$$

EQ. del TRASPORTO NON OMOGENEA, $n \geq 2$

Tutto analogo: il problema ha la forma

$$\boxed{\begin{cases} a \cdot \partial u = f(x) \\ u(x', 0) = \varphi(x') \end{cases}} \qquad \begin{matrix} a_n \neq 0 \\ \varphi, f \in C^1 \end{matrix}$$

e la soluzione (unica C^1) è data dalla formula

$$\boxed{u(x) = \varphi\left(x' - \frac{a'}{a_n} x_n\right) + \int_0^{x_n/a_n} f\left(a\sigma + \left(x' - \frac{a'}{a_n} x_n, 0\right)\right) d\sigma}$$

OSS Abbiamo sempre studiato il caso di coefficienti REALI. Che succede se studiamo l'equazione $au_x+bu_y=0$ per $a,b\in\mathbb{C}$, ad esempio

$$\boxed{u_x+iu_y=0}\ ?$$

Se poniamo $u=v+iw$, $v=\mathrm{Re}\,u$, $w=\mathrm{Im}\,u$, vediamo che v,w soddisfano

$$v_x=w_y,\qquad v_y=w_x$$

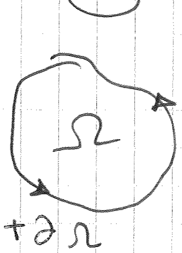
che sono le EQUAZIONI di CAUCHY-RIEMANN: la funzione u non è solo di classe C^1 ma è una FUNZIONE OLOMORFA. Allora notiamo due fatti:

(1) Il problema ai dati iniziali diventa

$$\boxed{\begin{cases} u_x+iu_y=0 \\ u(x,0)=\varphi(x)\end{cases}}$$

MOLTO PIÙ DELICATO. Infatti, dato che $u(x,y)$ deve essere una funzione olomorfa di $(x,y)\cong x+iy$, ne segue in particolare che il dato iniziale $\varphi(x)=u(x,0)$ NON PUÒ essere arbitrario C^1 ma deve essere anch'esso una funzione ANALITICA (= sviluppabile in serie di potenze).

(2) Il PROBLEMA al CONTORNO invece ora è



$$\boxed{\begin{matrix} u_x+iu_y=0 \text{ in } \Omega \\ u|_{\partial\Omega}=\varphi \end{matrix}}$$

molto più naturale: basta ricordare la FORMULA di CAUCHY

$$u(x,y)=\frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial\Omega}\frac{\varphi(\xi,\eta)}{\zeta-z}\,d\zeta$$

(notazioni: $\zeta=\xi+i\eta$, $z=x+iy$) che dà il valore di u in Ω conoscendo i suoi valori lungo il bordo dell'aperto Ω.

OSS [FACOLTATIVA] Il ragionamento precedente si applica anche al PB. NON OMOGENEO $\boxed{\begin{cases} U_x + i U_y = f(x,y) \\ U|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases}}$

Basta usare la FORMULA di CAUCHY in versione C^1 cioè: dato Ω aperto di $\mathbb{R}^2$ la cui frontiera è una CURVA REGOLARE SEMPLICE C^1, e data U in $C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{C})$, si ha

$$\boxed{U(x,y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial\Omega} \frac{U(\xi,\eta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \frac{\partial U}{\partial \bar{z}} \frac{d\xi\, d\eta}{\zeta - z}}$$

dove $\zeta = \xi + i\eta$, $z = x + iy$ e

$$\frac{\partial U}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(U_x + i U_y)$$

[DIM Usiamo le formule di GAUSS-GREEN

$$-\int_{+\partial\Omega} v(\xi,\eta)\, d\xi = \iint_{\Omega} v_y\, d\xi\, d\eta, \quad \int_{+\partial\Omega} v\, d\eta = \iint_{\Omega} v_x\, d\xi\, d\eta$$

$$\Rightarrow \quad \iint_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial \bar{z}} d\xi\, d\eta = \frac{1}{2i} \int_{+\partial\Omega} v\, d\zeta$$

Applichiamo la formula alla funzione $v = \frac{U}{\zeta - z}$ nell'aperto $\Omega \setminus B_\varepsilon(z)$: e otteniamo

$$2i \iint_{\Omega \setminus B_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{U(\xi,\eta)}{\zeta - z} d\xi\, d\eta = \int_{+\partial\Omega} \frac{U(\xi,\eta)}{\zeta - z} d\zeta - \int_{+\partial B_\varepsilon} \frac{U(\xi,\eta)}{\zeta - z} d\zeta$$

$$\equiv \int_{+\partial\Omega} \frac{U}{\zeta - z} d\zeta - \int_{+\partial B_\varepsilon} \frac{U(x,y)}{\zeta - z} d\zeta - \int_{+\partial B_\varepsilon} \frac{U(\xi,\eta) - U(x,y)}{\zeta - z} d\zeta$$

Al secondo membro, il secondo integrale è uguale a $-2\pi i\, U(x,y)$; il terzo si maggiora con $C\varepsilon$. Mandando $\varepsilon \to 0$ e dividendo per $2\pi i$ otteniamo la formula].

Quindi la soluzione del pb. al contorno

$$\begin{cases} u_x + i u_y = f(x,y) & \text{in } \Omega \\ u_{|\partial\Omega} = \varphi \end{cases}$$

(dove Ω è un aperto limitato con frontiera regolare semplice C^1 e $f \in C^1$) si rappresenta come

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial\Omega} \frac{\varphi(\xi,\eta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \frac{f(\xi,\eta)}{\zeta - z} d\xi d\eta .$$

OSS E nel caso generale $a u_x + b u_y = 0$, $a, b \in \mathbb{C}$ QUALUNQUE? $(b \neq 0)$

1. Se $\boxed{\frac{a}{b} \in \mathbb{R}}$, allora posto $a = \lambda b$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ possiamo semplificare e l'eq. si riduce a $\lambda u_x + u_y = 0$ cioè riotteniamo l'eq. del TRASPORTO.

2. Se $\boxed{\frac{a}{b} \notin \mathbb{R}}$, dividendo per b ci riduciamo ad un'eq. del tipo $(\alpha + i\beta) u_x + u_y = 0$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$. Facendo il cambiamento di variabili

$$v(x,y) = u(\alpha x + \beta y, x)$$

vediamo che v deve risolvere l'equazione

$$v_x + i v_y = 0$$

cioè ricadiamo in CAUCHY-RIEMANN.

[OSS Se abbiamo un'equazione omogenea di ordine $m \geq 1$ (in $\mathbb{R}^2$)

$$\partial_x^m u + a_{m-1} \partial_x^{m-1} \partial_y u + \dots + a_0 \partial_y^m u = 0$$

possiamo definire il POLINOMIO CARATTERISTICO

$$P(\tau, \sigma) = \tau^m + a_{m-1} \tau^{m-1} \sigma + \dots + a_0 \sigma^m$$

che si fattorizza

$$P = (\tau - \lambda_1 \sigma) \cdots (\tau - \lambda_m \sigma)$$

Se $\lambda_j \in \mathbb{R}$ $\forall j \Rightarrow$ TRASPORTO, altrimenti PROBLEMATICO]

EQUAZIONI ORDINARIE: DIPENDENZA dai DATI INIZIALI

Conosciamo già un risultato piuttosto generale, il TEOR. di ESISTENZA e UNICITÀ LOCALE di CAUCHY per il problema

$$\boxed{\begin{cases} x'(t) = f(t,x) \\ x(t_0) = \xi_0 \end{cases} \quad (P)}$$

dove $\underline{f} : I \times B \to \mathbb{R}^N$, $I = [t_0 - a, t_0 + a]$, $B = B_b(\xi_0) = \{\xi \in \mathbb{R}^N : |\xi - \xi_0| \le b\}$.

<u>TEOR</u> [$\exists!$ LOCALE di CAUCHY]. Supponiamo che (i) f sia CONTINUA su $I \times B$ (ii) f sia LIPSCHITZIANA in x di costante L, cioè, $\forall t \in I$, $\forall x, y \in B$

$$|f(t,x) - f(t,y)| \le L|x-y|.$$

ALLORA il problema (P) ammette un'unica soluzione $x(t) \in C^1(J; B)$ su un intervallo J che si può prendere della forma $J = J_\delta = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, per $\delta = \min\{a, \frac{1}{2L}, \frac{b}{M}\}$ $\quad (M = \max_{I \times B} |f|)$

[Richiamo della ben nota <u>DIM</u>: la mappa

$$\Phi(x) = \xi_0 + \int_{t_0}^{t} f(\sigma, x(\sigma))\, d\sigma$$

è una CONTRAZIONE da $C(J_\delta; B)$ in sé se δ è sufficientemente piccolo].

Esattamente la stessa dimostrazione dà un risultato più generale per il sistema con K PARAMETRI

$$(P_\lambda) \quad \begin{cases} x' = f(t, x, \lambda) \\ x(t_0) = \xi_0 \end{cases}$$

dove $t \in I = [t_0 - a, t_0 + a]$, f è definita su $I \times B \times B_1$, $B = \{\xi \in \mathbb{R}^N : |\xi - \xi_0| \le b\}$, $\lambda \in B_1 = \{\lambda \in \mathbb{R}^K : |\lambda - \lambda_0| \le c\}$.

<u>TEOR</u> [$\exists!$ locale con parametri] Supponiamo che $f : I \times B \times B_1 \to \mathbb{R}^n$ sia
(i) CONTINUA in $I \times B \times B_1$, (ii) LIPSCHITZIANA in x di costante L.
<u>ALLORA</u> il problema (P_λ) ammette un'unica soluzione $x(t, \lambda) : J \times B_1 \to B$, continua in (t, λ) e C^1 in t, dove $J = J_\delta = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ e $\delta = \min\left\{a, \frac{1}{2L}, \frac{b}{M}\right\}$ $\left(M = \max_{I \times B \times B_1} |f|\right)$.

[<u>DIM</u> (cenno) Quasi nessuna modifica è necessaria: la mappa

$$\Phi(x) = \xi_0 + \int_{t_0}^{t} f(\sigma, x(\sigma, \lambda), \lambda)\, d\sigma$$

è una contrazione da $C(J_\delta \times B_1; B)$ in sé se δ è sufficientemente piccolo].

<u>OSS</u> QUINDI:
1. Se $f(t, x)$ non dipende da parametri, la soluzione $x(t)$ è C^1 in t.
2. Se $f(t, x, \lambda)$ dipende con continuità da parametri λ, allora $x(t, \lambda)$ è C^1 in t e C in (t, λ)
3. Che succede se f è C^1 (o C^k) in λ? Allora anche $x(t, \lambda)$ è C^1 (o C^k) in λ, come segue dal risultato seguente.
   La dimostrazione però è più complicata!

TEOR Nelle stesse ipotesi del teorema precedente, se IN PIÙ supponiamo che f è C^1 in (X, λ), allora la soluzione $x(t, \lambda)$ è C^1 in (t, λ)

[DIM: CENNO [FACOLTATIVO].

Per semplicità consideriamo il caso di un solo parametro $\lambda \in \mathbb{R}$ $(k=1)$, e x a valori reali $(N=1)$.

FISSIAMO ξ, t_0, λ

DEFINIAMO, per h piccolo,

$$\Delta_h x(s) := \frac{x(s, \lambda+h) - x(s, \lambda)}{h}$$

Dato che

$$x(t, \lambda) = \xi_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s, \lambda), \lambda)\, ds$$

otteniamo

$$\Delta_h x(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{f(s, x(s, \lambda+h), \lambda+h) - f(s, x(s,\lambda), \lambda)}{h}\, ds \, .$$

Per il TEOR. di LAGRANGE

$$\frac{f(s, x(s, \lambda+h), \lambda+h) - f(s, x(s, \lambda+h), \lambda)}{h} = f_\lambda(s, x(s, \lambda+h), \zeta)$$

per un certo ζ fra λ e $\lambda+h$, e

$$\frac{f(s, x(s, \lambda+h), \lambda) - f(s, x(s,\lambda), \lambda)}{h} = f_x(s, \eta, \lambda) \cdot \Delta_h x(s)$$

per un certo η fra $x(s, \lambda)$ e $x(s, \lambda+h)$. SOMMANDO $\Rightarrow$

$$\Delta_h x(t) = \int_{t_0}^{t} \left[f_\lambda(s, x(s, \lambda+h), \zeta) + f_x(s, \eta, \lambda)\, \Delta_h x(s) \right] ds$$

Ora sia $y(t, \lambda)$ la soluzione di

$$\begin{cases} y'(t, \lambda) = f_\lambda(t, x(t, \lambda), \lambda) + f_x(t, x(t,\lambda), \lambda) \cdot y \\ y(0, \lambda) = 0 \end{cases}$$

Notare che si tratta di un'equazione LINEARE della forma $y' = a(t, \lambda) y + b(t, \lambda)$ che ha soluzione su tutto l'intervallo su cui sono definiti i coefficienti. Quindi $y(t, \lambda)$ è definita per tutti i $(t,\lambda) \in [t_0-\delta, t_0+\delta] \times B_1$, è continua in (t,λ), e C^1 int. INOLTRE $y(t,\lambda)$ soddisfa l'equazione integrale ODE 6

$$y(t,\lambda) = \int_{t_0}^{t} [f_\lambda(s, x(s,\lambda), \lambda) + f_x(s, x(s,\lambda), \lambda)\, y(s,\lambda)]\, ds .$$

Poniamo ora

$$z_h(t) := | \Delta_h x(t) - y(t,\lambda) |$$

e abbiamo

$$z_h(t) \leq \int_{t_0}^{t} |f_\lambda(s, x(s,\lambda+h), \xi) - f_\lambda(s, x(s,\lambda),\lambda)|\, ds$$

$$+ \int_{t_0}^{t} |f_x(s, x(s,\lambda),\lambda) - f_x(s,\eta,\lambda)| \cdot |y(s,\lambda)|\, ds$$

$$+ \int_{t_0}^{t} |f_x(s,\eta,\lambda)| \cdot z_h(s)\, ds .$$

Inoltre, per $h \to 0$, si ha

$$|f_\lambda(s, x(s,\lambda+h), \xi) - f_\lambda(s, x(s,\lambda),\lambda)| \to 0$$

uniformemente in $s \in [t_0, t]$ (si tratta di funzioni continue, e ξ sta fra λ e $\lambda+h$) -
Analogamente

$$|f_x(s, x(s,\lambda),\lambda) - f_x(s,\eta,\lambda)| \to 0$$

uniformemente in $s \in [t_0,t]$; inoltre $|y| \leq C_1$ e $|f_x(s,\eta,\lambda)| \leq C_2$. In conclusione

$$z_h(t) \leq \alpha(h) + C_2 \int_{t_0}^{t} z_h(s)\, ds$$

per $t \in [t_0, t_0+\delta]$, dove $\alpha(h) \to 0$ per $h \to 0$.

Ora ricordiamo che se φ è continua e soddisfa

$$\varphi(t) \leq \alpha + \int_{t_0}^{t} \varphi(s)\, ds \cdot C_2$$

allora $\varphi(t) \leq \alpha\, e^{C_2(t-t_0)}$

$$\left[\left(e^{-C_2 t} \int_{t_0}^{t} \varphi\right)' \leq \alpha e^{-C_2 t} ; \text{ INTEGRARE} \right].$$

Quindi $z_h(t) \leq \alpha(h)\, e^{C_2(t-t_0)}$ e per $h \to 0 \Rightarrow z_h(t) \to 0$.

CONCLUSIONE: $\Delta_h x(t) \to y(t,\lambda) \Rightarrow x(t,\lambda)$ è derivabile in λ e la derivata è uguale a $y(t,\lambda)$ cioè CONTINUA].

DIPENDENZA dalla CONDIZIONE INIZIALE

Riscriviamo il teor. di $\exists !$ locale in forma più GEOMETRICA:

COROLL Sia A un aperto di $\mathbb{R}^{N+1} = \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^N_x$, sia $f \in C(A; \mathbb{R}^N)$ una funzione LOCALMENTE LIPSCHITZIANA nella variabile x, e sia $K \subset\subset A$. Allora $\exists \delta > 0$, e $\forall (t_0, \xi_0) \in K$ esiste $x(t) \in C^1([t_0-\delta, t_0+\delta]; \mathbb{R}^N)$ unica soluzione del pb. di Cauchy

$$x' = f(t, x) \qquad x(t_0) = \xi_0$$

[DIM Scegliamo a, b così piccoli che il rettangolo $[t_0 - a, t_0 + a] \times \{\xi : |\xi - \xi_0| \le b\} \subseteq A$ per ogni scelta di $(t_0, \xi_0) \in K$. Chiamiamo M il massimo di $|f|$ su tutti questi rettangoli, e L la massima costante di Lipschitz di f su tali rettangoli (localmente Lipsch. su un compatto $\Rightarrow$ lipschitziana!). Allora dal teorema di $\exists !$ locale otteniamo la tesi, con un δ che dipende solo da a, b, L, M e quindi non dipende dalla condizione iniziale (t_0, ξ_0) scelta].

OSS Consideriamo il problema

$$(P_\xi) \quad \begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = \xi \end{cases}$$

nel quale FACCIAMO VARIARE ξ (tenendo fissato t_0). La soluzione $x(t, \xi)$ varia al variare di ξ, ed è definita su un intervallo $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ con δ indip. da ξ, grazie al corollario precedente.

Verifichiamo ora che $X(t,\xi)$ varia con CONTINUITA' al variare di ξ, e se f è C^1 in x la soluzione è C^1 in (t,ξ):

<u>COROLL</u> Consideriamo il problema (P_ξ) nelle ipotesi del corollario precedente. Allora la soluzione $X(t,\xi)$, definita per $t\in[t_0-\delta, t_0+\delta]$ e per ξ tali che $(t_0,\xi)\in K$, è CONTINUA in (t,ξ). Se in più si suppone f di classe C^1 in x, allora $X(t,\xi)$ è di classe C^1 in (t,ξ).

[<u>DIM</u> Basta osservare che $Z(t,\xi):=X(t,\xi)-\xi$ risolve il problema

$$\begin{cases} Z' = f(t, Z+\xi) \\ Z(t_0)=0 \end{cases}$$

che è un sistema con il parametro ξ. Applicando il teorema sulla dipendenza continua (o C^1) dai parametri, si ha la tesi].

<u>RIASSUMENDO</u>: se $f(t,x)$ è continua in t e lipsch. in x, la soluzione $X(t,\xi)$ di

$$x' = f(t,x), \quad x(t_0)=\xi$$

è CONTINUA al variare di ξ. Se poi f è C^1 in x, allora $X(t,\xi)$ è C^1 in ξ.

EQUAZIONI del I ORDINE

Occupiamoci adesso delle equazioni NONLINEARI del I ordine

$$F(x, u, \partial u) = 0 . \qquad (1)$$

Daremo una trattazione approfondita del caso QUASILINEARE

$$\boxed{a(x, u) \cdot \partial u = f(x, u)} \qquad (2)$$

e un rapido cenno al caso generale (1).

Riassumendo in modo informale, vogliamo dimostrare che il PROBLEMA di CAUCHY per (2) con la CONDIZIONE INIZIALE

$$\boxed{u_{|S} = \varphi} \qquad (3)$$

dove S è una superficie C^1 in $\mathbb{R}^n$ e φ una funzione C^1 su S, è localmente risolubile.
PRECISAMENTE: se $a, f, \varphi \in C^1$, e se il vettore $a(x_0, \varphi(x_0))$ NON È TANGENTE alla superficie S nel punto $x_0 \in S$, allora esiste un intorno U di x_0 e un'unica soluzione $u \in C^1(U; \mathbb{R})$ del problema (2), (3).

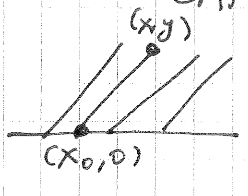
PROCEDIAMO per GRADI, lavorando per semplicità nel caso bidimensionale $\underline{n = 2}$.

1 CASO LINEARE a COEFFICIENTI COSTANTI

$$\boxed{\begin{cases} a u_x + b u_y = f(x,y) \\ u|_{y=0} = \varphi(x) \end{cases}}$$ in $\mathbb{R}^2$

(cioè $u(x,0)=\varphi(x)$)

Abbiamo già studiato questo caso e scoperto che se $\boxed{b \neq 0}$ si può applicare il METODO DELLE CARATTERISTICHE:



$$\begin{cases} x' = a \\ y' = b \\ z' = \big(u(x(t),y(t))\big)' = f(x,y) \end{cases} \qquad \begin{cases} x(0) = x_0 \\ y(0) = 0 \\ z(0) = \varphi(x_0) \end{cases}$$

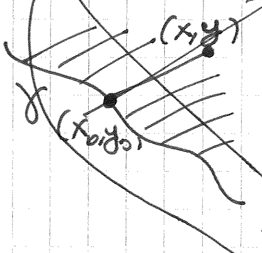
Cerchiamo la caratteristica passante per (x,y), che a $t=0$ esce dal punto $(x_0,0)$ della retta iniziale. La SOLUZIONE è la curva (retta)

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = bt \\ z = \varphi(x_0) + \int_0^t f(x(\sigma), y(\sigma))\, d\sigma \end{cases}$$

Per calcolare $u(x,y)$ basta RICAVARE (x_0, t) in funzione del punto (x,y) e SOSTITUIRE in $z(t) \equiv u$: $\quad t = y/b \Rightarrow x_0 = x - \frac{a}{b} y \Rightarrow$

$$\Rightarrow z(t) = \boxed{u(x,y) = \varphi\left(x - \frac{a}{b}y\right) + \int_0^{y/b} f\left(x - \frac{a}{b}y + \sigma a, \sigma b\right) d\sigma}$$

1' CASO LIN. a COEFF. COSTANTI, DATI INIZIALI LUNGO UNA CURVA.



$$\begin{cases} a u_x + b u_y = f(x,y) \\ u(\gamma(s)) = \varphi(s) \end{cases} \qquad f, \varphi \in C^1$$

dove $\gamma(s) = (\gamma_1(s), \gamma_2(s))$ è una curva C^1.

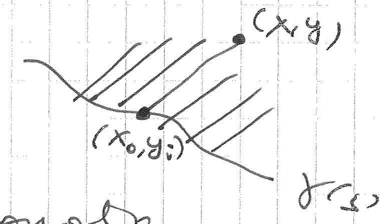
CARATTERISTICHE: $\begin{cases} x' = a \\ y' = b \\ z' = f(x,y) \end{cases} \qquad z(t) = u(x(t), y(t))$

(2) COEFF. COSTANTI, DATI INIZIALI LUNGO UNA CURVA

NLI 3

Vediamo come modificare il metodo per un problema del tipo

$$\boxed{\begin{cases} a u_x + b u_y = f(x,y) \\ u(\gamma(s)) = \varphi(s) \end{cases}}$$



in cui il dato iniziale è assegnato lungo una curva C^1, $\gamma(s) = (\gamma_1(s), \gamma_2(s))$ - Come prima, le caratteristiche soddisfano l'equazione (il sistema)

$$x' = a, \qquad y' = b$$

e ponendo $z(t) = u(x(t), y(t))$,

$$z' = f(x,y).$$

Vogliamo la caratteristica che esce dal punto $\gamma(s)$ della curva; quindi x, y, z dipendono sia da t sia da s (Indichiamo con x', y', z' le derivate RISPETTO a t !) - Riassumendo:

$$\begin{cases} x' = a \\ y' = b \\ z' = f(x,y) \end{cases} \qquad \begin{cases} x(0,s) = \gamma_1(s) \\ y(0,s) = \gamma_2(s) \\ z(0,s) = \varphi(s) \end{cases}$$

perché $z(0,s) = u(\gamma(s)) = \varphi(s)$ - Risolvendolo otteniamo

$$\begin{cases} x(t,s) = \gamma_1(s) + at \\ y(t,s) = \gamma_2(s) + bt \\ z(t,s) = \varphi(s) + \int_0^t f(x(\sigma,s), y(\sigma,s))\,d\sigma \end{cases}$$

Le caratteristiche (x,y) determinano una mappa $(t,s) \longmapsto \Phi(t,s) = (x(t,s), y(t,s))$.

Se riusciamo a INVERTIRLA, cioè a calcolare (t,s) in funzione di (x,y), basta sostituire in $z(t,s)$; infatti

$$u(x(t,s), y(t,s)) = z(t,s)$$

cioè
$$u(\Phi(t,s)) = z(t,s)$$
e quindi
$$\boxed{u(x,y) = z \circ \Phi^{-1}(x,y)}$$

Resta da capire: sotto quali condizioni Φ è (localmente) INVERTIBILE? Una condizione SUFFICIENTE perché Φ sia invertibile in un intorno del punto $(0,0)$ è

$$\boxed{\Phi \text{ di classe } C^1 \text{ e } \det \partial\Phi(0,0) \neq 0}$$

Vediamo che
$$\partial\Phi(0,0) = \begin{pmatrix} \partial_t x & \partial_s x \\ \partial_t y & \partial_s y \end{pmatrix}\Bigg|_{(0,0)} \equiv \begin{pmatrix} a & \gamma_1'(0) \\ b & \gamma_2'(0) \end{pmatrix}$$

perché $x(0,s) = \gamma_1(s)$, $y(0,s) = \gamma_2(s)$.

QUINDI, se $\det \partial\Phi(0,0) \neq 0$ cioè
$$\boxed{a\gamma_2'(0) - b\gamma_1'(0) \neq 0} \qquad (1)$$
il metodo precedente fornisce una SOLUZIONE LOCALE del problema in un intorno del punto $\Phi(0,0) \equiv \gamma(0)$. NOTARE CHE:

1. nel caso $\gamma(s) = (s,0)$ (condizioni iniziali sull'asse x) riotteniamo la condiz. $\boxed{b \neq 0}$;
2. il SIGNIFICATO GEOMETRICO di (1) è semplice: scrivendola così
$$(a,b)\cdot(\gamma_2'(0), -\gamma_1'(0)) \neq 0$$
e notando che $(\gamma_2'(0), -\gamma_1'(0))$ è NORMALE alla curva, la (1) equivale a:

$$\boxed{\text{IL VETTORE } (a,b) \text{ NON È TANGENTE ALLA CURVA in } \gamma(0)}$$

③ COEFFICIENTI VARIABILI

NLI S

$$\boxed{\begin{cases} a(x,y)\,u_x + b(x,y)\,u_y = f(x,y) \\ u(\gamma(s)) = \varphi(s) \end{cases}}$$

dove $a, b, f, \varphi, \gamma \in C^1$, a valori reali.

EQUAZ. delle CARATTERISTICHE:

$$\begin{cases} x' = a(x,y) \\ y' = b(x,y) \\ z' = f(x,y) \qquad (z(t,s) = u(x(t,s), y(t,s))) \end{cases}$$

con le condiz. iniziale

$$\begin{cases} x(0,s) = \gamma_1(s) \\ y(0,s) = \gamma_2(s) \\ z(0,s) = u(\gamma(s)) = \varphi(s) \end{cases}$$

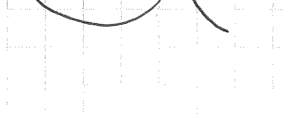
È un sistema di 3 equazioni ordinarie con dati dipendenti da s in modo C^1. La teoria generale ci dice che ESISTE UN'UNICA SOLUZIONE LOCALE (x,y,z) che è C^1 sia in t che in s ed è definita su un intorno $[-\delta,\delta]\times[-\varepsilon,\varepsilon]$ di $(0,0)$. IN PARTICOLARE, la mappa

$$(t,s) \longmapsto \Phi(t,s) = (x(t,s), y(t,s))$$

è di classe C^1 su $[-\delta,\delta]\times[-\varepsilon,\varepsilon]$, ed una condiz. SUFFICIENTE per invertire Φ (in un intorno di $(0,0)$) è $\det \partial\Phi(0,0) \neq 0$ cioè

$$\boxed{a(\gamma(0))\cdot\gamma_2'(0) - b(\gamma(0))\cdot\gamma_1'(0) \neq 0}$$

in quanto (come prima) $\partial\Phi(0,0) = \begin{pmatrix} a(\gamma(0)) & \gamma_1'(0) \\ b(\gamma(0)) & \gamma_2'(0) \end{pmatrix}$



COME PRIMA: se il vettore (a,b) nel punto $\gamma(0)$ <u>non è tangente</u> alla curva, in quel punto, allora si può invertire Φ in un intorno di $(0,0)$ e la soluzione del problema si scrive nella forma

$$\boxed{u(x,y) = z(\Phi^{-1}(x,y))}$$

in un intorno di $\gamma(0)$.

④ CASO GENERALE

Fatto sorprendente: il caso generale si risolve ESATTAMENTE allo stesso modo!

$$\boxed{\begin{cases} a(x,y,u)\,u_x + b(x,y,u)\,u_y = f(x,y,u) \\ u(\gamma(s)) = \varphi(s) \end{cases}}$$

$a, b, f, \varphi, \gamma \in C^1$, tutto a valori reali.

CARATTERISTICHE:

$$\begin{cases} x'(t,s) = a(x,y,z) \\ y'(t,s) = b(x,y,z) \\ z'(t,s) = f(x,y,z) \end{cases} \qquad \begin{cases} x(0,s) = \gamma_1(s) \\ y(0,s) = \gamma_2(s) \\ z(0,s) = u(\gamma(s)) = \varphi(s) \end{cases}$$

Teor. di $\exists!$ locale (e dipendenza C^1 dai dati) $\Rightarrow$ la mappa $\Phi(t,s) = (x(t,s), y(t,s))$ è ben definita e C^1 intorno a $(0,0)$. Se poi $\det \partial\Phi(0,0) \neq 0$ cioè

$$\boxed{a(\gamma_1(0),\gamma_2(0),\varphi(0))\,\gamma_2'(0) - b(\gamma_1(0),\gamma_2(0),\varphi(0))\,\gamma_1'(0) \neq 0}$$

allora Φ è invertibile in un intorno di $(0,0)$, e ponendo

$$\boxed{u(x,y) = z(\Phi^{-1}(x,y))}$$

otteniamo l'unica soluzione C^1 del problema in un intorno di $\gamma(0)$. FORMALIZZIAMO:

NLI 7

TEOR Consideriamo il pb. di CAUCHY

$$(P)\begin{cases} a(x,y,u)u_x + b(x,y,u)u_y = f(x,y,u) \\ u(\gamma(s)) = \varphi(s) \end{cases}$$

dove $\gamma(s)$ è una curva C^1 $\gamma:]-\varepsilon,\varepsilon[\to \mathbb{R}^2$, $\varphi \in C^1(]-\varepsilon,\varepsilon[)$ a valori reali, a, b, f sono di classe C^1 in un intorno di $(\gamma(0), \varphi(0))$ a valori reali.

SE il vettore $(a(\gamma(0),\varphi(0)), b(\gamma(0),\varphi(0)))$ NON È TANGENTE a γ in $\gamma(0)$, ALLORA in un intorno del punto $\gamma(0)$ è definita un'UNICA SOLUZIONE di classe C^1 del problema (P).

[DIM ESISTENZA: dimostrata col metodo delle caratteristiche. UNICITÀ: segue dallo stesso procedimento, in quanto la funzione $z(t,s) = u(x(t,s), y(t,s))$ (se u è una soluzione del problema) deve risolvere il sistema delle eq. caratteristiche che sappiamo avere soluzione UNICA dal teor. di $\exists!$ locale di Cauchy].

OSS Caso di DIMENSIONE $n \geq 2$ QUALUNQUE:

$$(P_n)\begin{cases} a(x,u)\cdot \partial u = f(x,u) \\ u(\gamma(s)) = \varphi(s) \end{cases}$$

dove $\gamma: B_\varepsilon(0) \to \mathbb{R}^n$, $B_\varepsilon(0) \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$, è una superficie C^1, f, φ, a sono C^1 a valori reali. (a è a valori $\mathbb{R}^n$). SE

$$\boxed{a(\gamma(0),\varphi(0)) \text{ NON È TG. a } \gamma \text{ in } \gamma(0)}$$

allora in un intorno di $\gamma(0)$, $\exists!$ una soluz. C^1 $u(x)$ del problema (P_n).

CENNO: il CASO COMPLETAMENTE NON LINEARE

Anche il caso generale [FACOLTATIVO]

$$F(x, u, \partial u) = 0$$

si può trattare col metodo delle caratteristiche.

① Supponiamo di calcolare la soluzione $u(x)$ lungo una curva $x(t)$, e poniamo $z(t) = u(x(t))$ come al solito. Ci serve una equazione per $x(t)$ e per $z(t)$.

② Ma NON BASTA, perché nell'equazione compare ∂u. Allora poniamo

$$p(t) = \partial u(x(t)) \quad \text{(è un VETTORE!)}$$

Allora l'equazione per $z(t)$ è

$$z'(t) = \partial u(x(t)) \cdot x'(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z'(t) = p(t) \cdot x'(t) \qquad (1)$$

che però non è nella forma standard che ci serve.

③ L'equazione per $p(t)$ è ANCORA PEGGIORE:

$$p'(t) = \partial^2 u(x(t)) \cdot x'(t) \qquad (2)$$

in quanto compaiono le DERIVATE SECONDE!

④ <u>IDEA RISOLUTIVA</u>: se deriviamo l'equazione di partenza rispetto a x abbiamo l'identità

$$\partial_x F(x, z, p) + \partial_z F(x, z, p) + \partial_p F \cdot \partial^2 u = 0 \qquad (3)$$

QUINDI se PONIAMO

$$\boxed{x'(t) = \partial_p F(x, z, p)} \qquad (4)$$

l'eq. (2) diventa

$$p'(t) = \partial^2 u \cdot \partial_p F$$

e sostituendo nella (3) $\Rightarrow$

$$\boxed{\partial_x F(x, z, p) + \partial_z F \cdot p + p' = 0} \qquad (3')$$

mentre la (1) diventa

$$\boxed{z'(t) = \partial_p F(x,z,p) \cdot p(t)}$$

(5) Conclusione: il sistema è

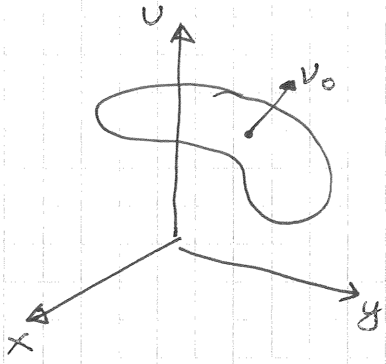
$$\begin{cases} x'(t) = \partial_p F(x,z,p) \\ z'(t) = \partial_p F(x,z,p) \cdot p(t) \\ p'(t) = -\partial_x F(x,z,p) - \partial_z F(x,z,p) \cdot p \end{cases}$$

A partire dal sistema di equazioni ordinarie appena scritto si può dimostrare anche nel caso generale l'esistenza e unicità locale di una soluzione C^1. L'unica vera difficoltà è formulare la condizione sufficiente di risolubilità (che nel caso quasilineare era la NON TANGENZA del vettore dei coefficienti alla superficie iniziale) ~~e sulla~~ quale sorvoliamo.

INTERPRETAZIONE GEOMETRICA

Supponiamo che $u(x,y)$ risolva l'equazione

$$a(x,y,u)\,u_x + b(x,y,u)\,u_y = f(x,y,u) \qquad (1)$$



Possiamo disegnare il grafico di $u(x,y)$ come una superficie in $\mathbb{R}^3$ $(z = u(x,y))$. Il VETTORE NORMALE alla superficie in un punto (x_0, y_0, z_0) $(z_0 = u(x_0,y_0))$ si scrive come

$$v_0 = (-u_x(x_0,y_0), -u_y(x_0,y_0), 1)$$

(non abbiamo normalizzato, ma qui è irrilevante).

[v_0 è normale alla superficie perché è ortogonale a tutti i vettori tangenti, che hanno la forma

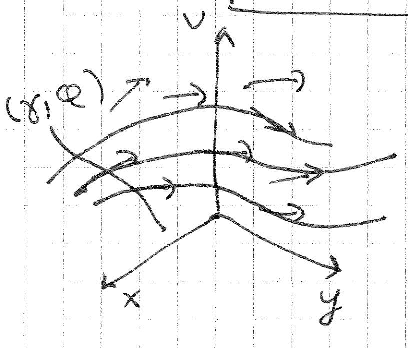
$$(\lambda, \mu, \lambda u_x + \mu u_y), \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \;].$$

Allora l'equazione (1) si può scrivere

$$v_0 \cdot (a(x_0,y_0,z_0), b(x_0,y_0,z_0), f(x_0,y_0,z_0)) = 0$$

cioè:

$$\boxed{\text{IL VETTORE } (a,b,f) \text{ È TANGENTE AL GRAFICO di } u}$$



In altri termini: se disegnamo in $\mathbb{R}^3$ il campo di vettori (a, b, f), la soluzione $u(x,y)$ è una superficie tangente ai vettori del campo in ogni punto. Quello che abbiamo fatto nelle pagine precedenti è: (1) calcolato le

- LINEE di FLUSSO del campo (le curve caratteristiche, tangenti al campo in ogni punto) (2) preso tutte le linee uscenti da una curva $(\gamma(s), \varphi(s))$, la cui unione genera la superficie $z = u(x,y)$. La soluzione u è unione di linee di flusso del campo (a, b, f).

ESEMPI

Il metodo delle caratteristiche talvolta consente di CALCOLARE ESPLICITAMENTE le soluzioni.

① $\begin{cases} u_x + x u_y = 0 \\ u(x,0) = x^2 \end{cases}$ vicino $(x_0, 0)$

CONDIZ. SUFFICIENTE: (a,b) non tang. all'asse x

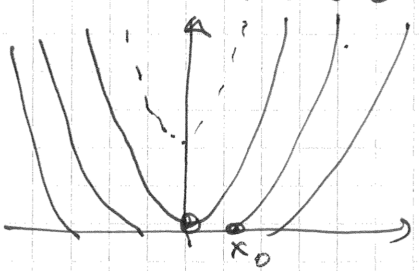
$(a,b) = (1,x)$, quindi deve essere $\boxed{x_0 \neq 0}$

Caratteristiche:

$$\begin{cases} x' = 1 \\ y' = x \\ z' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + t \\ y = x_0 t + t^2/2 \\ z(0,s) = \varphi(s) \end{cases}$$

z è costante: $z(t,s) = \varphi(s)$ $\forall t, s$.

Ricavo (t, x_0) in funzione di (x,y):



$$t = x - x_0, \quad y = x_0 x - x_0^2 + \frac{(x-x_0)^2}{2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{x^2}{2} - \frac{x_0^2}{2}$$

$$\Rightarrow x_0^2 = x^2 - 2y$$

Se $x_0 > 0$ la caratteristica uscente da $(x_0, 0)$ dà $x_0 = \sqrt{x^2 - 2y}$ (se $x_0 < 0$ è $x_0 = -\sqrt{x^2-2y}$).

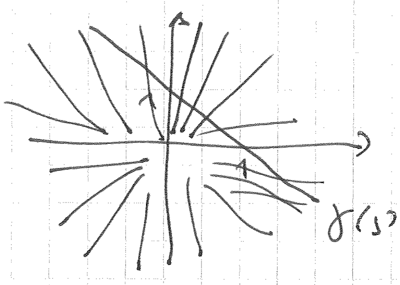
$$\Rightarrow u(x,y) = \varphi(x_0) = x_0^2 = \boxed{x^2 - 2y}$$

Notare che se $x_0 = 0$ la caratteristica è TANGENTE all'asse x e infatti sorge qualche problema (la soluzione non è univocamente determinata vicino all'origine).

NLI 12

(2) $\begin{cases} x u_x + y u_y = 0 \\ u(\gamma(s)) = 2s \end{cases}$ dove $\gamma(s) = (1-s, s)$

Possiamo risolvere se $(a,b) = (x,y)$ non è tg a γ nei punti di γ:



$(1-s)\cdot\gamma_2'(s) - s\cdot\gamma_1'(s) \neq 0$ cioè

$(1-s)\cdot 1 - s\cdot(-1) = 1 \neq 0$ OK SEMPRE

CARATTERISTICHE

$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x(0,s) = 1-s \\ y(0,s) = s \end{cases}$

$z' = 0 \qquad z(0,s) = \varphi(s) = 2s \Rightarrow z(t,s) = 2s$

$\Rightarrow \begin{cases} x = (1-s)e^t \\ y = s e^t \\ z = 2s \end{cases}$ caratteristica uscente da $\gamma(s) = (1-s, s)$

(Notare che le caratteristiche sono ... le SEMIRETTE uscenti dall'origine)

RICAVO (t,s) da (x,y):

$s = \frac{y}{e^t} \Rightarrow x = \left(1 - \frac{y}{e^t}\right)e^t$

$\Rightarrow e^t = x + y \Rightarrow s = \frac{y}{x+y}$

QUINDI

$u(x,y) = z(t,s) = 2s = \boxed{\frac{2y}{x+y}}$

③ EQ. DI BURGERS

NLI 13

$$\begin{cases} u_y + u u_x = 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$$

La curva iniziale è l'asse delle x cioè $\gamma(s)=(s,0)$

CONDIZ. di RISOLUBILITÀ vicino a $(s,0)$:

$$a(s,0,\varphi(s))\cdot 0 - b(s,0,\varphi(s))\cdot 1 \neq 0$$

cioè

$$\varphi(s)\cdot 0 - 1\cdot 1 \neq 0 \quad \text{OK SEMPRE}$$

La soluzione LOCALE C^1 esiste in un intorno della retta iniziale (asse delle x).

CARATTERISTICHE

$$\begin{cases} x' = z \\ y' = 1 \\ z' = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x(0,s) = s \\ y(0,s) = 0 \\ z(0,s) = \varphi(s) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t,s) = t\varphi(s) + s \\ y(t,s) = t \\ z(t,s) = \varphi(s) \end{cases}$$

NON SI RIESCE a ricavare (t,s) da (x,y).

Al massimo si può scrivere

$$u(x,y) = z(t,s) = \varphi(s) = \varphi(x - t\varphi(s))$$

$$\Rightarrow \boxed{u(x,y) = \varphi(x - y\cdot u)}$$

in forma implicita. PERÒ si riesce a descrivere com'è fatta la soluzione.

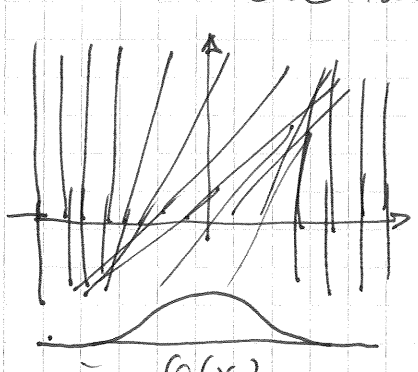
INFATTI u è costante lungo le caratteristiche

$$(x(t,s), y(t,s)) = (t\varphi(s)+s\ ,\ t)$$

cioè nelle rette

$$x = y\varphi(s) + s \quad (\text{da } (s,0))$$

che escono dall'asse delle x con pendenza $\frac{1}{\varphi(s)}$; pendenza VERTICALE se $\varphi(s)=0$.

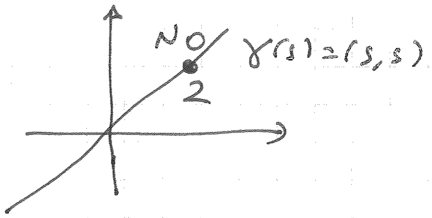


$\varphi(x)$

In particolare, QUALUNQUE SIA il dato $\varphi \not\equiv 0$, le caratteristiche SI TAGLIANO, e dato che u è costante su di esse (con costanti diverse), la SOLUZIONE NON È GLOBALE!

NLI 14

(4) $\begin{cases} u u_x + u_y = 1 \\ u(s,s) = s/2 \end{cases}$



RISOLUBILITA':

$$a(\gamma(s),\varphi(s))\gamma_2' - b(\gamma(s),\varphi(s))\gamma_1'(s) \neq 0$$

$$\underset{s/2}{\overset{|||}{}} \cdot 1 - 1 \cdot 1 \neq 0 \quad \text{cioè } \boxed{s \neq 2}$$

TRANNE nel punto $\gamma(2)=(2,2)$, vicino agli altri punti di $\gamma(s)$ (bisettrice degli assi) si può risolvere.

CARATTERISTICHE:

$$\begin{cases} x' = z \\ y' = 1 \\ z' = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x(0,s) = s \\ y(0,s) = s \\ z(0,s) = s/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = t + s \\ z = t + s/2 \\ x = t^2/2 + st/2 + s \end{cases}$$

Ricavo (t,s) in funzione di (x,y):

$$s = y - t \Rightarrow x = \cancel{\frac{t^2}{2}} + \frac{t}{2}(y - \cancel{t}) + y - t$$

$$\Rightarrow t = 2\,\frac{x-y}{y-2} \quad ; \quad s = y - 2\,\frac{x-y}{y-2}$$

$$\Rightarrow u(x,y) = z = 2\,\frac{x-y}{y-2} + \frac{y}{2} - \frac{x-y}{y-2} = \boxed{\frac{y}{2} + \frac{x-y}{y-2}}$$

(5) in $\mathbb{R}^3$: $\begin{cases} x_1 \partial_1 u + 2x_2 \partial_2 u + \partial_3 u = 3u \\ u(x_1,x_2,0) = \varphi(x_1,x_2) \end{cases}$

(RISOLUBILITA': $1 \neq 0$ sempre ok)

CARATT. $\begin{cases} x_1' = x_1 \\ x_2' = 2x_2 \\ x_3' = 1 \\ z' = 3z \end{cases} \quad \begin{cases} x_1(0,s_1,s_2) = s_1 \\ x_2(0,s_1,s_2) = s_2 \\ x_3(0,s_1,s_2) = 0 \\ z(0,s_1,s_2) = \varphi(s_1,s_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = s_1 e^t \\ x_2 = s_2 e^{2t} \\ x_3 = t \\ z = \varphi(s_1,s_2)e^{3t} \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = x_3 \\ s_1 = x_1 e^{-x_3} \\ s_2 = x_2 e^{-2x_3} \end{cases} \Rightarrow \boxed{u(x) = \varphi(x_1 e^{-x_3}, x_2 e^{-2x_3})e^{3x_3}}$$

FUNZIONI TEST e PARTIZIONI dell'UNITÀ

DEF Ω aperto non vuoto di $\mathbb{R}^n$.

$C(\Omega)$ è lo spazio delle $\varphi : \Omega \to \mathbb{C}$ CONTINUE.

Il SUPPORTO di $\varphi \in C(\Omega)$ è l'insieme (chiuso in Ω).

$$\operatorname{supp} \varphi := \overline{\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}}$$

(si può anche dire che $\operatorname{supp}\varphi = \Omega \setminus Z$, dove Z è il sottoinsieme di Ω unione di tutti gli aperti su cui $\varphi \equiv 0$).

$C_c(\Omega)$ è lo spazio delle $\varphi \in C(\Omega)$ il cui supporto è COMPATTO. E

DEF Lo SPAZIO delle FUNZIONI TEST su Ω è lo spazio $C_c^\infty(\Omega)$ delle funzioni C^∞ da Ω in $\mathbb{C}$ a supporto compatto.

OSS Ricordiamo che la funzione $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t \leq 0 \\ \exp(-\frac{1}{t}) & \text{per } t > 0 \end{cases}$$

è di classe C^∞

[infatti, σ è continua, e $\sigma(t) \cdot P(1/t)$ è continua per ogni polinomio P; ma tutte le derivate di σ hanno questa forma]

Quindi per costruire una $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ basta prendere

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| \geq 1 \\ \exp\left(\frac{1}{|x|^2 - 1}\right) & \text{se } |x| < 1 \end{cases}$$

Definiamo

$$\rho_1(x) := \frac{\rho(x)}{\|\rho\|_{L^1}}, \quad \rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\rho_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

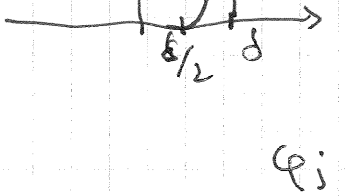
per $\varepsilon > 0$. Le funzioni ρ_ε si chiamano MOLLIFICATORI di FRIEDRICHS. Notare che ρ_ε è (i) RADIALE, (ii) $\rho_\varepsilon \geq 0$, (iii) PARI (cioè $\rho_\varepsilon(-x) = \rho_\varepsilon(x)$), (iv) $\int \rho_\varepsilon \, dx = 1$, e (v) $\operatorname{supp} \rho_\varepsilon = \overline{B_\varepsilon(0)}$.

OSS Se Ω è un aperto di $\mathbb{R}^n$, presa una palla $B_\varepsilon(x_0)$ tale che $B_\varepsilon(x_0) \subseteq \Omega$, la funzione $\rho_\varepsilon(x-x_0)$ sta in $C^\infty_c(\Omega)$ (quindi $C^\infty_c(\Omega)$ NON È VUOTO!).

TEOR Sia $K \subseteq \mathbb{R}^n$ compatto, siano $U_1, \dots, U_N$ aperti che ricoprono K cioè $K \subseteq U_1 \cup \dots \cup U_N$. Allora esistono $\varphi_1, \dots, \varphi_N \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ tali che: (i) $\operatorname{supp} \varphi_j \subseteq U_j \ \forall j$, (ii) $\sum \varphi_j(x) = 1$ su K

[DIM Consideriamo tutte le sfere $B_\varepsilon(x)$ tali che $B_{2\varepsilon}(x) \subseteq U_j$ per qualche aperto U_j, qualche $x \in K$ e qualche $\varepsilon > 0$. Le $B_\varepsilon(x)$ ricoprono K, quindi possiamo estrarre un sottoricopr. FINITO che indichiamo con $B_{\varepsilon_1}(x_1), \dots, B_{\varepsilon_m}(x_m)$.
Ora definiamo per $j = 1, \dots, N$ la funzione ψ_j come la somma di tutti i mollificatori $\rho_{\varepsilon_k}(x - x_k)$ tali che $B_{\varepsilon_k}(x_k) \subseteq U_j$ (solo le sferette contenute in U_j!). Ovviamente $\psi_j \in C^\infty_c(U_j)$, inoltre $\sum_{j=1}^N \psi_j > 0$ su K; poniamo $\delta =$ MINIMO di $\sum \psi_j$ su K ($\delta > 0$!).

Per concludere basta prendere una funzione



$\tau \in C^\infty(\mathbb{R})$ che vale 0 per $t \leq \delta/2$, 1 per $t \geq \delta$, ed è compreso fra 0 e 1, e porre

$$\varphi_j := \frac{\psi_j}{\sum \psi_j} \cdot \tau\left(\sum \psi_j\right) \ ]$$

OSS Ad esempio: $$\tau(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t \leq \delta/2 \\ 1 & \text{per } t \geq \delta \\ \dfrac{\exp(\delta/2 - t)}{\exp(\delta/2 - t) + \exp(t - \delta)} & \text{per } \frac{\delta}{2} < t < \delta. \end{cases}$$

OSS La famiglia $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_N\}$ si chiama PARTIZIONE dell'UNITÀ associata al compatto K e al suo ricoprimento $U_1, \ldots, U_N$. Notare che se $f \in C^m(K)$ è una funzione di classe C^m, scrivendo $f_j = f \cdot \varphi_j$ si ha

$$f = f_1 + \cdots + f_N$$

e le funzioni f_j hanno supporto contenuto in U_j (e la stessa regolarità di f). Questo procedimento si chiama LOCALIZZAZIONE di f.

SUPERFICI in $\mathbb{R}^n$

DEF Una $\varphi \in C^1(A;\mathbb{R}^n)$, A aperto di $\mathbb{R}^m$, $m<n$, si dice IMMERSIONE se $\partial\varphi$ ha rango massimo (cioè m) in tutti i punti. (Se in più φ è un omeomorfismo fra A e $\varphi(A)$ allora si dice che φ è un EMBEDDING).

DEF Sia $\varphi \in C^1(A;\mathbb{R}^n)$ una immersione (A aperto $\mathbb{R}^m$). Allora l'immagine $S=\varphi(A)$ si chiama anche SUPERFICIE C^1, REGOLARE, in FORMA PARAMETRICA, di DIMENSIONE m, e le variabili $(t_1,\dots,t_m)\in A$ si chiamano PARAMETRI

[Notare il lieve abuso: la "superficie" è tutta l'applicazione $\varphi: A\to S$, più che l'immagine $\varphi(S)$]

S si dice SEMPLICE se φ è iniettiva, e si dice che è una CURVA se $m=1$.

DEF Una $\tau\in C^1(B;A)$, B, A aperti di $\mathbb{R}^m$, τ invertibile con $\tau^{-1}\in C^1$, si dice CAMBIAMENTO di PARAMETRIZZAZIONE; se $S=\varphi(A)$ è una superficie, essa è descritta anche da $S=\psi(B)$, $\psi=\varphi\circ\tau$

~~OSS Il caso più importante e utile per i calcoli è quello in cui fra le funzioni $\varphi=(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ che descrivono S ne sono m (= dimensione)~~

~~OSS Sia $S=\varphi(A)$, $\varphi\in C^1(A;\mathbb{R}^n)$, A aperto di $\mathbb{R}^m$. Può capitare che tra le funzioni $\varphi=(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ ve ne siano m che coincidono con uno dei parametri; ad esempio~~

$$\cancel{\varphi(t)=(t_1,\dots,t_m,\varphi_{m+1}(t),\dots,\varphi_n(t))}$$

OSS Se $u \in C^1(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ il suo GRAFICO è l'insieme
$$S = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 = u(x_1,x_2)\}.$$
Si tratta di una SUPERFICIE; per scriverla nella forma parametrica standard, basta porre
$$\varphi_1(t_1,t_2) = t_1, \quad \varphi_2(t_1,t_2) = t_2$$
e
$$\varphi_3(t_1,t_2) = u(t_1,t_2)$$
allora
$$x \in S \iff x = \varphi(t_1,t_2) \qquad (\varphi = (\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3))$$

In generale, se $\varphi \in C^1(A;\mathbb{R}^n)$ è un'immersione ($A \subseteq \mathbb{R}^m$, $m<n$) e $S = \varphi(A)$, diremo che S è IN FORMA CARTESIANA quando fra le n funzioni $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ ve ne sono m che coincidono con uno dei parametri $t_1,\dots,t_m$ (distinti). Ad esempio
$\varphi_1(t) = t_1, \dots, \varphi_m(t) = t_m$ come nel caso di $u(x_1,x_2)$.
Questa è la forma più comoda per i calcoli.

OSS In realtà, LOCALMENTE, possiamo SEMPRE ridurci alla forma CARTESIANA; se $S = \varphi(A)$, per ipotesi $\partial\varphi$ ha rango massimo; ad esempio il determinante delle prime m righe è diverso da 0. Questo vuol dire che la mappa
$$\Phi(t_1,\dots,t_m) = (\varphi_1(t),\dots,\varphi_m(t))$$
è C^1 e localmente INVERTIBILE. Allora possiamo porre
$$\begin{cases} x_{m+1} = \varphi_{m+1}\circ\Phi(x_1,\dots,x_m) \\ \dots \\ x_n = \varphi_n\circ\Phi(x_1,\dots,x_m) \end{cases}$$
e abbiamo descritto (localmente) S in forma cartesiana, come grafico $x'' = \psi(x')$, $x' = (x_1,\dots,x_m)$, $x'' = (x_{m+1},\dots,x_n)$.

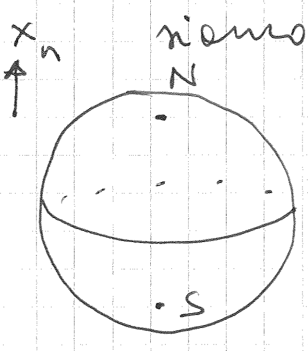
ESEMPI La SFERA UNITARIA S^{n-1} è l'insieme dei punti $x \in \mathbb{R}^n$ tali che $|x| = 1$.

In forma parametrica possiamo descrivere S^{n-1} tramite le COORDINATE POLARI

$$
\begin{cases}
x_1 = \varphi_1(t) \equiv \cos(t_1) \\
x_2 = \varphi_2(t) \equiv \operatorname{sen}(t_1)\cos(t_2) \\
x_3 = \varphi_3(t) \equiv \operatorname{sen}(t_1)\operatorname{sen}(t_2)\cos(t_3) \\
- - - - - - - - - - - - \\
x_{n-1} = \varphi_{n-1}(t) \equiv \operatorname{sen}(t_1) \cdots \operatorname{sen}(t_{n-2})\cos(t_{n-1}) \\
x_n = \varphi_n(t) \equiv \operatorname{sen}(t_1) \cdots\cdots \operatorname{sen}(t_{n-1})
\end{cases}
$$

dove $t_1 \in (0, \pi)$ e $t_2, .., t_{n-1} \in (0, 2\pi)$.

Se vogliamo passare in forma cartesiana siamo costretti a SCEGLIERE un EMISFERO, e



questo si può fare in $2n$ modi (2 emisferi per ogni coordinata x_j). Ad esempio rispetto a x_n: posto $x' = (x_1, .., x_{n-1})$ si ha

EMISFERO NORD: $\quad x_n = \sqrt{1 - |x'|^2} \qquad |x'| < 1$

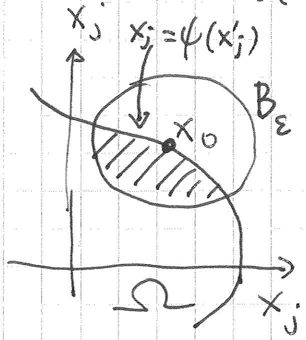
EMISFERO SUD: $\quad x_n = -\sqrt{1 - |x'|^2} \qquad |x'| < 1$

ma non riusciamo a coprire tutta la sfera in modo C^1 (funzioni singolari per $|x'| \to 1$): ci servono tutte le $2n$ carte!

OSS Un terzo modo di descrivere le superfici è come LUOGO di ZERI $\{x \in \mathbb{R}^n : F(x) = 0\}$ di una $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-m}$. Questa forma (detta IMPLICITA) è localmente equivalente alle altre, sotto opportune ipotesi su F.

APERTI con FRONTIERA C^1 e NORMALE a $\partial\Omega$

Un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ha FRONTIERA $\partial\Omega \in C^1$ se vale la proprietà:



$\forall x_0 \in \partial\Omega$ esiste una palla $B_\varepsilon(x_0)$ e una $\varphi : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ tali che

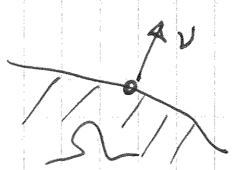
(i) φ è C^1

(ii) $\Omega \cap B_\varepsilon(x_0) = \{x \in B_\varepsilon(x_0) : x_j < \varphi(x_j')\}$
(oppure $x_j > \varphi(x_j')$),
dove $x_j' = (x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)$.

In altri termini, LOCALMENTE $\partial\Omega$ è una superficie in forma cartesiana (di dim $= n-1$) e l'aperto Ω STA DA UNA PARTE di $\partial\Omega$.

<u>OSS</u> E se Ω = CUBO UNITARIO? non rientra nella preced. definizione. Purtroppo definire in generale cosa vuol dire "$\partial\Omega$ è C^1 a tratti" non è tanto semplice. Ci accontentiamo del caso C^1 e osserviamo che se "la geometria di $\partial\Omega$ è semplice" le nozioni introdotte si generalizzano facilmente.

<u>DEF</u> Ω aperto con $\partial\Omega \in C^1$. La <u>NORMALE ESTERNA</u> a $\partial\Omega$ in $x_0 \in \partial\Omega$, se in un intorno di x_0 l'aperto è descritto come $\{x_n < \varphi(x')\}$, è il vettore unitario



$$\nu := \frac{(-\partial'\varphi, 1)}{\sqrt{1 + |\partial'\varphi|^2}}$$

(ovvie modifiche negli altri casi $x_n > \varphi(x')$, $x_j < \varphi(x_j')$)

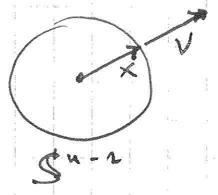
Qui $\partial'\varphi = (\partial_1\varphi, \dots, \partial_{n-1}\varphi)$, $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$.

SUP 5

OSS Le componenti di ν sono

$$\nu_j = \frac{-\partial_j \varphi}{\sqrt{1+|\partial'\varphi|^2}}, \quad \dots, \quad \nu_n = \frac{1}{\sqrt{1+|\partial'\varphi|^2}}$$

ES La normale esterna alla sfera unitaria S^{n-1} nel punto $x \in S^{n-1}$ (quindi $|x| = 1$) coincide col vettore x:



$$\nu = x$$

(ha modulo 1 e la stessa direzione di x).

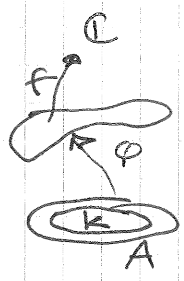
Verifichiamo: nell'emisfero $x_n = \sqrt{1-|x'|^2} = \varphi$ ad esempio

$$\partial'\varphi = -\frac{x'}{\sqrt{1-|x'|^2}} \Rightarrow 1+|\partial'\varphi|^2 = \frac{1}{1-|x'|^2}$$

$$\Rightarrow \qquad \nu = (x', \sqrt{1-|x'|^2}) \, .$$

INTEGRALE di SUPERFICIE

Consideriamo una superficie $S_0=\varphi(A)$, C^1, regolare, semplice, di dimensione $m<n$, e sia K un compatto $\subseteq A$. Sia $S=\varphi(K)\subseteq S_0$.



DEF Data $f:S\to\mathbb{C}$ CONTINUA, l'INTEGRALE DI SUPERFICIE $\int_S f\,dS$ è definito come

$$\boxed{\int_S f\,dS := \int_K f(\varphi(t))\cdot\sqrt{\det(\partial\varphi^T\cdot\partial\varphi)}\,dt}$$

In particolare l'AREA di S è il numero

$$\boxed{\text{area}(S)\equiv|S| = \int_S 1\,dS = \int_K \sqrt{\det(\partial^T\varphi\cdot\partial\varphi)}\,dt}$$

OSS (1) Notare che $\partial^T\varphi\cdot\partial\varphi$ è una matrice quadrata definita positiva perché $(\partial^T\varphi\cdot\partial\varphi\cdot v, v)\equiv|\partial\varphi\cdot v|^2$.

(2) La definizione di int. di superf. (e di area!) può sembrare completamente arbitraria. In realtà si verifica subito che essa NON DIPENDE dalla PARAMETRIZZAZIONE scelta per descrivere S, e anzi se si seguono procedimenti puramente geometrici si arriva esattamente alle stesse formule.

(3) Nel caso di dimensione $\boxed{m=1}$ cioè per le CURVE $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$, le formule si riducono a

$$\int_\gamma f\,ds = \int_a^b f(\gamma(t))\cdot|\gamma'(t)|\,dt \qquad (a<b)$$

$$\int_\gamma 1\,ds = \int_a^b|\gamma'(t)|\,dt = \ell(\gamma)$$

che si chiamano INTEGRALE di LINEA e LUNGHEZZA di γ.

Notare che valgono le formule

$$\left| \int_\gamma f\, ds \right| \leq \|f\|_{L^\infty(\gamma)} \cdot \ell(\gamma)$$

Notare anche che l'INTEGRALE COMPLESSO lungo una curva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ è leggermente diverso ; è definito come

$$\int_\gamma f\, dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$$

(dove $f \cdot \gamma'$ è un prodotto di numeri complessi).
Tuttavia vale la disuguaglianza $(a<b)$

$$\left| \int_\gamma f\, dz \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))| \cdot |\gamma'(t)|\, dt$$
$$\equiv \int_\gamma |f|\, ds$$

ESEMPI

(A) SUPERFICIE in FORMA CARTESIANA di DIM. $n-1$

Se ad esempio $(x' = (x_1, \dots, x_{n-1}))$

$$S = \{ x : x_n = \psi(x'),\ x' \in K \}$$

dove K è un compatto di $\mathbb{R}^{n-1}$ e $\psi \in C^1$, la forma parametrica corrispondente è

$$\varphi(x') = (x', \psi(x')) \quad (\in \mathbb{R}^n)$$

quindi

$$\partial\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \hline & & \partial'\psi & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{n-1} \\ \hline \partial'\psi \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \partial'\psi = \\ (\partial_1\psi, \dots, \partial_{n-1}\psi) \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ (dopo qualche conto non difficile ma lungo)

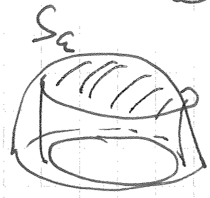
$$\det(\partial\varphi^T \cdot \partial\varphi) = 1 + |\partial'\psi|^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_S f\, dS = \int_K f(x', \psi(x')) \sqrt{1 + |\partial'\psi|^2}\, dx'}$$

e $\text{area}(S) = \int_K \sqrt{1+|\partial'\psi|^2}\, dx'$.

(B) SFERA UNITARIA

Lavoriamo sull'emisfero nord



$$x_n = \varphi(x') = \sqrt{1-|x'|^2}\ , \quad |x'|<1$$

Se vogliamo $\varphi \in C^1$ dobbiamo restringerci a $K_\varepsilon = \{x' \in \mathbb{R}^{n-1} : |x'| \le 1-\varepsilon\}$ e quindi alla calotta $S_\varepsilon = \{x : |x|=1, |x'| \le 1-\varepsilon\}$.

Otteniamo

$$\boxed{\int_{S_\varepsilon} f\, dS = \int_{|x'|\le 1-\varepsilon} f(x', \sqrt{1-|x'|^2}) \frac{dx'}{\sqrt{1-|x'|^2}}}$$

COME SI FA a definire $\int_{\mathbb{S}^{n-1}} f\, dS$ su TUTTA la SFERA?

Basta LOCALIZZARE:

1) definiamo i $2n$ emisferi $(j=1,\dots,n)$

$$S_j^+ = \{x \in \mathbb{S}^{n-1} : x_j > 0\}, \quad S_j^- = \{x \in \mathbb{S}^{n-1} : x_j < 0\}$$

2) restringiamoci alle calotte

$$S_{j,\varepsilon}^+ = \{x \in S_j^+ : |x_j'| \le 1-\varepsilon\}, \quad S_{j,\varepsilon}^- \text{ simile}$$

3) prendiamo una PARTIZIONE dell'UNITA' $\varphi_1, \dots, \varphi_{2n}$ associata al ricoprimento sopra descritto di $\mathbb{S}^{n-1}$

4) definiamo $f_j = f \cdot \varphi_j$ e

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} f\, dS = \sum_{j=1}^{2n} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} f_j\, dS$$

il che è possibile poiché per ogni f_j ci siamo ridotti al caso di un solo emisfero.

Questo procedimento ovviamente si generalizza al caso di $\int_{\partial A} f\, dS$, A con frontiera C^1: basta LOCALIZZARE f a intorni in cui ∂A si scrive in f. cartesiana.

(C) QUALCHE FORMULA UTILE

$$S_r(0) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = r\}$$

Sulle calotte

$$S' = S_r(0) \cap \{x_n \geq \delta\}$$

si ha

$$\boxed{\int_S f\, dS = \int f(x', \sqrt{r^2 - |x'|^2}) \frac{r \cdot dx'}{\sqrt{r^2 - |x'|^2}}}$$

Notare che il cambiam. di variabili

$$x' = r y' = (r y_1, \dots, r y_{n-1})$$

dà $\displaystyle\int f(x', \sqrt{r^2 - |x'|^2}) \frac{r\, dx'}{\sqrt{r^2 - |x'|^2}} = r^{n-1} \int f(ry', r\sqrt{1-|y'|^2}) \frac{dy'}{\sqrt{1-|y'|^2}}$

e quindi

$$\boxed{\int_{S_r(0)} f\, dS = r^{n-1} \int_{S_1(0)} f(ry)\, dS_y}$$

Usiamo la notazione dS_y per indicare che l'integrale di superf. è calcolato rispetto alle y.

Invece di 0 si può scegliere un altro centro: valgono le formule

$$\int_{S_r(x)} f(y)\, dS_y = \int_{|x-y|=r} f(y)\, dS_y = \int_{S_r(0)} f(x+z)\, dS_z =$$

$$= r^{n-1} \int_{S_1(0)} f(x + rw)\, dS_w$$

Confrontiamo con il caso delle PALLE:

$$\int_{B_r(x)} f(y)\, dy = \int_{|x-y| \leq r} f(y)\, dy = \int_{B_r(0)} f(x+z)\, dz =$$

$$= r^n \int_{B_1(0)} f(x + rw)\, dw .$$

COORDINATE POLARI

Ricordiamo che se $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ vale la formula

$$\boxed{\int f(x)\,dx = \int_0^\infty \Big(\int_{S_\rho(0)} f\, dS \Big) d\rho} \qquad (1)$$

[DIM (cenno). Possiamo localizzare f e ridurci ad un semispazio, ad es. $\{x \in \mathbb{R}^n : x_n \geq \delta > 0\}$.
Qui possiamo fare il cambiam. di variabili

$$x = \Phi(x', \rho) \equiv (x', \sqrt{\rho^2 - |x'|^2})$$

da cui

$$\partial \Phi = \left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline \text{non interessa} & \rho/\sqrt{\rho^2-|x'|^2} \end{array} \right)$$

$$|\det \partial\Phi| = \rho / \sqrt{\rho^2 - |x'|^2}$$

e quindi

$$\int f(x)\,dx = \int \Big(\int f(x', \sqrt{\rho^2-|x'|^2}) \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2-|x'|^2}}\, dx' \Big) d\rho$$

che è esattamente la tesi].

La (1) si può scrivere anche così:

$$\boxed{\int f(x)\,dx = \int_0^\infty \Big(\int_{S_1(0)} f(\rho y)\, dS_y \Big) \rho^{n-1} d\rho}$$

Conseguenza utile:

$$\boxed{\int_{|x| \leq R} f\, dx = \int_0^R \int_{S_\rho(0)} f\, dS\, d\rho}$$

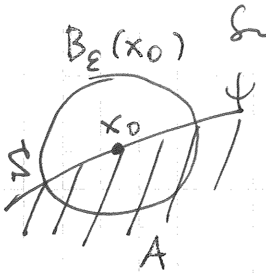
Se infine scegliamo un centro diverso da 0:

$$\int f(x)\,dx = \int_0^\infty \int_{S_\rho(x_0)} f\, dS\, d\rho = \int_0^\infty \int_{S_1(0)} f(x_0 + \rho y)\, dS_y \cdot \rho^{n-1} d\rho.$$

OSS $\boxed{|\mathbb{S}^{n-1}| = \text{area}(\mathbb{S}^{n-1}) = 2^{[\frac{n+1}{2}]} \cdot \pi^{[\frac{n}{2}]}/(n-1)!! =: \omega_n}$

ne segue $\boxed{|S_r(x)| = r^{n-1}\omega_n, \quad |B_r(x)| = r^n \frac{\omega_n}{n}}$

TEOREMA FONDAMENTALE del CALCOLO



Supponiamo di avere una superficie S di classe C^1 regolare in forma cartesiana
$$S = \{x : x_n = \psi(x')\}$$
e una funzione $f \in C^1_c(B_\varepsilon(x_0))$ con supporto compatto nella palla $B_\varepsilon(x_0)$. Vogliamo calcolare
$$\int_A \partial_j f \, dx$$
dove A è l'aperto $\{x : x_n < \psi(x')\}$.

Abbiamo 3 CASI:

① Il supporto di f è tutto contenuto in A, oppure tutto contenuto in $\mathbb{R}^n \setminus \bar{A}$ (cioè NON TOCCA ∂A). Allora $\int_A \partial_j f = \int_{\mathbb{R}^n} \partial_j f$ e l'integrale fa 0: [basta applicare FUBINI e integrare prima rispetto a $dx_j \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} \partial_j f \, dx_j = 0$]

② $\boxed{j<n}$ Partiamo dalla formula
$$\partial_j \int_{-\infty}^{\psi(x')} f(x)\,dx_n = \int_{-\infty}^{\psi(x')} \partial_j f(x)\,dx_n + f(x',\psi(x'))\cdot \partial_j \psi(x').$$
Se ora integriamo in $dx_1 \cdots dx_{n-1}$ otteniamo
$$0 = \int_A \partial_j f\,dx + \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x',\psi(x'))\cdot\partial_j\psi(x')\,dx'$$
da cui
$$\int_A \partial_j f\,dx = \int f(x',\psi(x'))\,\frac{-\partial_j\psi(x')}{\sqrt{1+|\partial'\psi|^2}}\sqrt{1+|\partial'\psi|^2}\,dx'$$
$$= \int_{\partial A} f\cdot \nu_j \, dS$$

③ $\boxed{j=n}$ Per il t. di FUBINI,
$$\int_A \partial_n f\,dx = \int\left(\int_{-\infty}^{\psi(x')} \partial_n f\,dx_n\right)dx' =$$

$$= \int f(x', \psi(x'))\, dx' = \int f(x', \psi(x')) \frac{1}{\sqrt{1+|\partial'\psi|^2}} \sqrt{1+|\partial'\psi|^2}\, dx'$$

$$= \int_{\partial A} f \cdot \nu_n \, dS$$

IN TUTTI e 3 i CASI ABBIAMO DIMOSTRATO che vale

$$\int_A \partial_j f \, dx = \int_{\partial A} f \cdot \nu_j \, dS \qquad (1)$$

TEOR [fondam. del calcolo]. Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ con frontiera C^1, sia ν la sua normale esterna, e sia $f \in C^1(\overline{\Omega})$. Allora per ogni $j = 1, .., n$ vale

$$\int_\Omega \partial_j f \, dx = \int_{\partial\Omega} f \cdot \nu_j \, dS$$

[DIM Localizziamo $f = f_1 + \ldots + f_N$ con una partizione dell'unità, in modo che il supporto di ciascuna f_k verifichi uno dei casi ①, ②, ③ esaminati sopra (questo si può fare perché $\partial\Omega$ è compatto e si può coprire con un n° finito di sfere su ciascuna delle quali $\partial\Omega$ si scrive in f. cartesiana). Ora sappiamo che la formula (1) vale per ogni f_k, e sommando su k abbiamo la tesi].

ESEMPI ⓐ $F = (F_1, .., F_n)$ $\quad \operatorname{div} F \equiv \nabla \cdot F = \partial_1 F_1 + \ldots + \partial_n F_n$

$$\Rightarrow \int_\Omega \operatorname{div} F \, dx = \int_{\partial\Omega} F \cdot \nu \, dS$$

ⓑ su $\partial\Omega$, $\frac{\partial f}{\partial \nu} := \nu \cdot \partial f$

$$\Rightarrow \int_\Omega \Delta u \, dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} \, dS$$

ⓒ $$\int_\Omega g \cdot \partial_j f \, dx = -\int_\Omega f \cdot \partial_j g \, dx + \int_{\partial\Omega} (fg) \cdot \nu_j \, dS.$$

IL LAPLACIANO $\Delta = \partial_1^2 + \dots + \partial_n^2$

Eq. omogenea: $\boxed{\Delta u = 0 \quad \text{LAPLACE}}$
Eq. non omogenea: $\boxed{\Delta u = f \quad \text{POISSON}}$

Qual è il problema CORRETTO per queste equazioni?

<u>ESEMPIO</u> Ricordiamo che per $u_x + i u_y = 0$ il problema più corretto sembra quello al contorno:

$$\begin{cases} u_x + i u_y = 0 & \text{in } \Omega \\ u_{|\partial\Omega} = \varphi \end{cases} \Rightarrow u = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial\Omega} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Ma se $u = v + iw$, $v = \mathrm{Re}\, u$, $w = \mathrm{Im}\, u$, si ha $v_x = w_y$, $v_y = -w_x$ (Cauchy - Riemann) e quindi

$$\Delta v = v_{xx} + v_{yy} = 0$$
$$\Delta w = w_{xx} + w_{yy} = 0$$

cioè $\mathrm{Re}\, u$ e $\mathrm{Im}\, u$ sono SOLUZIONI dell'Eq. di LAPLACE.

Questo sembra suggerire che (almeno in dimensione $n = 2$) il problema giusto sia il

<u>PROBLEMA al CONTORNO</u>

$$\begin{cases} \Delta u = f(x) & \text{in } \Omega \text{ aperto di } \mathbb{R}^n \\ u_{|\partial\Omega} = \varphi \end{cases}$$

Vari argomenti di origine fisica rafforzano questo punto di vista

<u>OSS</u> La condizione al bordo $u_{|\partial\Omega} = \varphi$ si chiama spesso CONDIZIONE di DIRICHLET, e il caso più importante è quello di condizioni NULLE cioè $u_{|\partial\Omega} = 0$.

<u>OSS</u> Un altro tipo di PB al contorno si ha imponendo

$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \varphi$ su $\partial\Omega$ (CONDIZ. di NEUMANN)

CASO OMOGENEO $\Delta u = 0$ (LAPLACE)
LE FUNZIONI ARMONICHE

Il caso $\Delta u = 0$ (Laplace) è importantissimo perché rappresenta l'estensione a $n \geq 2$ della teoria delle funzioni olomorfe. Così importante che le soluzioni hanno un nome speciale:

<u>DEF</u> $u \in C^2(\Omega)$ tale che $\Delta u = 0$ in Ω (aperto di $\mathbb{R}^n$) si chiama <u>FUNZIONE ARMONICA</u> in Ω.

<u>ES</u> ① $\boxed{n=1}$ Le funzioni armoniche ($u'' = 0$) nell'intervallo (a,b) sono le funzioni LINEARI $u(x) = c_1 + c_2 x$.

② $\boxed{n=2}$ Le funzioni armoniche in Ω sono le PARTI REALI ($\Leftrightarrow$ PARTI IMG) di funzioni olomorfe.

③ $\boxed{n \geq 3}$: le cose si fanno interessanti.

<u>OSS</u> Prima ancora di tentare di risolvere il PB al contorno, vale la pena di studiare le numerose proprietà delle soluzioni di $\Delta u = 0$, le funzioni armoniche.

L'operatore Δ è collegato alle situazioni di EQUILIBRIO raggiunte dopo processi di DIFFUSIONE. Dire che $\Delta u = 0$ vuol dire che u è in EQUILIBRIO con i PUNTI CIRCOSTANTI; cerchiamo di precisare questa intuizione.

L'idea da tenere in mente: se $\Delta u = 0$ allora

$$\boxed{\forall x, \quad u(x) \approx \text{media dei valori di } u \text{ INTORNO a } x}$$

MEDIE SFERICHE

Lo strumento tecnico che ci serve per esprimere la proprietà di equilibrio in modo preciso.

(PRIMA) MEDIA SFERICA di f in x:

$$\boxed{\fint_{B_r(x)} f := \frac{1}{|B_r(x)|}\int_{B_r(x)} f(y)\,dy} \qquad |B_r(x)| = \frac{\omega_n}{n} r^n$$

Ha senso $\forall f \in L^1_{loc}(\Omega)$ e $B_r(x) \subseteq \Omega$.

SECONDA MEDIA SFERICA di f in x:

$$\boxed{\fint_{S_r(x)} f := \frac{1}{|S_r(x)|}\int_{S_r(x)} f(y)\,dS_y} \qquad |S_r(x)| = \omega_n r^{n-1}$$

Ovviamente le medie dipendono da x e da $r > 0$.

PROP [regolarizzazione] Sia $r > 0$ fissato, $f : \Omega \to \mathbb{C}$, e poniamo $F(x) = \fint_{B_r(x)} f(y)$ per tutti gli x tali che $B_r(x) \subseteq \Omega$. Allora:

(i) Se $f \in L^1_{loc}(\Omega) \Rightarrow F$ è CONTINUA

(ii) Se $f \in C^k(\Omega) \Rightarrow F \in C^{k+1}$

OSS Quindi la media di f è PIÙ REGOLARE di f. Niente di strano: la primitiva di una funzione è più regolare della funzione.

[(i) Sia $x_j \to x_0$ (tali che $B_r(x_j), B_r(x_0) \subseteq \Omega$).

Si ha $F(x_j) = c\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\cdot \mathbb{1}_{B_j}(y)\,dy$, dove

$B_j = B_r(x_j)$ e $c = \frac{\omega_n}{n} r^n$ è COSTANTE.

Notiamo che $f_j = c f(y)\mathbb{1}_{B_j} \to f_0 = c f(y) \mathbb{1}_{B_0}$ q.o.

INOLTRE $|f_j| \leq c|f|\cdot \mathbb{1}_{B_{2r}(x_0)} = g$ per j abb. grande, e $g \in L^1(\Omega)$. Per il teo. di conv. dom. di Lebesgue concludiamo che $F(x_j) \to F(x_0)$.

(ii) CASO $k=0$. Scriviamo

$$\int_{B_r(x)} f(y)dy = \int_{|x'-y'|\le r} dy' \int_{x_n-\sqrt{r^2-|x'-y'|^2}}^{x_n+\sqrt{r^2-|x'-y'|^2}} f(y)\, dy_n$$

Vediamo che si può derivare tutto rispetto a x_n (f continua); portando ∂_{x_n} dentro l'integrale in $\int dy'$ otteniamo

$$\partial_{x_n} F(x) = c\int_{|x'-y'|\le r} dy' \left[f(y', x_n+\sqrt{\ }) - f(y', x_n - \sqrt{\ }) \right]$$

e vediamo che $\partial_{x_n} F$ è continua in x.

Analogamente tutte le $\partial_{x_j} F$ sono continue $\Rightarrow F \in C^1$.

Caso $k \ge 1$. Scriviamo, per $|\alpha| = k$,

$$F(x) = c\int_{B_r(0)} f(x+y)\,dy \Rightarrow \partial_x^\alpha F = \int_{B_r(0)} \partial_x^\alpha f(x+y)\,dy$$

portando le derivate sotto integrale. Per induzione otteniamo subito la tesi].

PROP Sia $f \in C(\Omega)$. Allora $\forall x \in \Omega$

$$\lim_{r\downarrow 0} ⨍_{B_r(x)} f = \lim_{r\downarrow 0} ⨍_{S_r(x)} f = f(x)$$

[f è UNIF. CONTINUA su $\overline{B_{r_0}(x)} \subseteq \Omega$.

Quindi $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ t.c. $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Ora se $r < r_0$, $r < \delta$, possiamo scrivere

$$\left| ⨍_{B_r(x)} f(y) - f(x) \right| = \left| ⨍_{B_r(x)} [f(y) - f(x)] \right| \le \varepsilon$$

E quindi $⨍_{B_r} f(y) \to f(x)$. Stesso discorso per $⨍_{S_r}$].

OSS In realtà, $⨍_{B_r(x)} f \to f(x)$ per q.o. sotto la sola ipotesi $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ [Teor. di LEBESGUE] ma questo è un risultato molto più delicato.

PROPRIETÀ della MEDIA e F. ARMONICHE

Possiamo precisare la proprietà "u armonica è la media dei suoi valori vicini":

TEOR [proprietà della MEDIA] Se $u \in C^2(\Omega)$ è armonica in Ω allora $\forall\, B_r(x) \subseteq \Omega$

$$u(x) = \fint_{B_r(x)} u = \fint_{S_r(x)} u$$

[Notiamo che si ha $\frac{\partial}{\partial r} \fint_{S_r(x)} f = \frac{1}{n} \fint_{B_r(x)} \Delta f \quad \forall f \in C^2$.

Infatti:

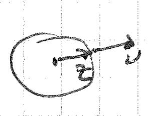
$$\fint_{S_r(x)} f = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{S_r(x)} f \, dS_y = \frac{1}{\omega_n} \int_{S_1(0)} f(x+rz)\, dS_z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial r} \fint_{S_r(x)} f = \frac{1}{\omega_n} \int_{S_1(0)} \nabla f(x+rz) \cdot z \, dS_z .$$

Invece

$$\fint_{B_r(x)} \Delta f = \frac{1}{\omega_n} \int_{B_1(0)} \Delta f(x+rz)\, dz = \frac{n}{\omega_n} \int_{S_1(0)} \nabla f(x+rz) \cdot \nu \, dS_z$$

[segue dal teor. della divergenza $\int_A \partial_j g \, dx = \int_{\partial A} g \cdot \nu_j \cdot dS$, ν normale esterna a ∂A, ma si può dim. anche direttamente su la sfera]. Dato che la normale esterna ν a $z \in S_1(0)$

$S_1(0)$ 

coincide con z, otteniamo la proprietà richiesta.

Ora, se $\Delta u = 0$, ne deduciamo che $\partial_r \fint_{S_r(x)} u = 0$ $\Rightarrow \fint_{S_r(x)} u =$ costante, ma $\lim_{r \downarrow 0} \fint_{S_r} f = f(x)$ e quindi $u(x) = \fint_{S_r(x)} u$. L'altra proprietà della media segue subito: $\int_{B_r(x)} f \, dy = \int_0^r \int_{S_r(x)} f \, dS \, d\rho = \int_0^r \omega_n \rho^{n-1} f(x)\, d\rho$

$$= \frac{\omega_n}{n} r^n f(x) \Rightarrow f(x) = \fint_{B_r(x)} f \quad]$$

Vale anche il viceversa, quindi

TEOR Sia $u \in C^2(\Omega)$. u è armonica in Ω SE E SOLO SE soddisfa la proprietà della media
$$u(x) = \fint_{S_r(x)} u \qquad \forall\, B_r(x) \subseteq \Omega .$$

[Dobbiamo completare solo $\Leftarrow$:
Per assurdo: se $\Delta u(x_0) > 0 \Rightarrow \Delta u(x) > 0$ in una pallina $B_r(x_0) \subseteq \Omega$, ma allora
$$\frac{\partial}{\partial r} \fint_{S_r(x_0)} u = \fint_{B_r(x_0)} \Delta u > 0 \quad \text{mentre per ipotesi}$$
$$\frac{\partial}{\partial r} \fint_{S_r(x_0)} u = 0 \qquad \text{ASSURDO} \;]$$.

REGOLARITÀ di F. ARMONICHE (C^∞)

OSS Dato che le medie regolarizzano se una funzione soddisfa la proprietà della media possiamo applicare il cosiddetto BOOTSTRAP:

TEOR Sia $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tale che $u(x) = \fint_{B_r(x)} u \quad \forall B_r(x) \subseteq \Omega$.
Allora $u \in C^\infty(\Omega)$. In particolare, se $u \in C^2(\Omega)$ è ARMONICA allora $u \in C^\infty(\Omega)$.

[Sia $x_0 \in \Omega$, sia $B_\varepsilon(x_0) \subseteq \Omega$, e notiamo che se $r = \frac{\varepsilon}{2}$ allora $B_r(x) \subseteq B_\varepsilon(x_0) \subseteq \Omega \quad \forall x \in B_r(x_0)$.
Applichiamo la proprietà di regolarizzazione delle medie: $u \in L^1_{loc} \Rightarrow F \in C$ ma $u = F$ quindi $u \in C \Rightarrow F \in C^1$ ma $u = F \Rightarrow u \in C^1$ eccetera. Conclusione: $u \in C^\infty(B_r(x_0))$]

OSS In realtà: se $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ soddisfa $\Delta u = 0$ (nel senso $\mathcal{D}'(\Omega)$) ALLORA $u \in C^\infty(\Omega)$! [ma anche troppo difficile da DIM]

REGOLARITÀ di F. ARMONICHE (A)

Sappiamo che $\Delta u = 0 \Rightarrow u \in C^\infty$. Ma vale molto di più: u è ANALITICA cioè "olomorfa".

LEMMA Sia $u \in C(\overline{B_r(x_0)})$ di classe C^2 e armonica in $B_r(x_0)$. Allora
$$|\partial_j u(x_0)| \leq \frac{n}{r} \max_{\overline{B_r(x_0)}} |u|, \qquad \forall j = 1, \dots, n$$
$$|\partial^\alpha u(x_0)| \leq \frac{e^{|\alpha|-1} n^{|\alpha|}}{r^{|\alpha|}} |\alpha|! \max_{\overline{B_r(x_0)}} |u|, \qquad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n$$
e se $u \geq 0$,
$$|\partial_j u(x_0)| \leq \frac{n}{r} u(x_0).$$

[u armonica $\Rightarrow \partial_j u$ armonica, $j = 1, \dots, n$. Per la proprietà della media
$$\partial u(x_0) = \fint_{B_r(x_0)} \partial u = \frac{n}{r} \fint_{S_r(x_0)} \nu u$$
dove ν è la normale esterna a $S_r(x_0)$, per il teor. della divergenza $[\int_A \partial_j f \, dy = \int_{\partial A} \nu_j f \, dS]$.

~~Quindi $|\partial u(x_0)| \leq \frac{4}{r}$~~ Ne segue la prima proprietà.

Continuando a maggiorare, se $u \geq 0$,
$$\leq \frac{n}{r} \fint_{S_r(x_0)} |u| = \frac{n}{r} \fint_{S_r(x_0)} u = \frac{n}{r} u(x_0)$$
e quindi otteniamo la terza proprietà.

Per la stima di $\partial^\alpha u(x_0)$ procediamo per INDUZIONE. $\boxed{|\alpha| = 1}$ già fatto. Se è vera per $\boxed{|\alpha| = m}$, si ha
$$|\partial_j \partial^\alpha u(x_0)| \leq \frac{n}{\rho} \max_{\overline{B_\rho(x_0)}} |\partial^\alpha u| \quad \text{dato che } \partial^\alpha u$$
è armonica nella sfera $B_\rho(x_0)$, $0 < \rho < r$; applicando il caso m nella sfera $B_{r-\rho}(y) \subseteq B_r(x_0)$,
$$\leq \frac{n}{\rho} \frac{e^{m-1} n^m}{(r-\rho)^m} \max_{\overline{B_{r-\rho}(y)}} |u|$$
(dove y è il pto di MAX di $|\partial^\alpha u|$ su $B_\rho(x_0)$). Ora scelgo ρ tale che $\frac{1}{\rho(r-\rho)^m} \leq \frac{(m+1)e}{r^{m+1}} \Rightarrow$ TESI:

basta prendere $\rho = \frac{r}{m+1} \Rightarrow \frac{m+1}{r^{m+1}\left(\frac{m}{m+1}\right)^m} =$
$$= \frac{m+1}{r^{m+1}} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \leq \frac{m+1}{r^{m+1}} e \;]$$

$\frac{\Delta}{8}$

TEOR Se $u \in C^2(\Omega)$ è armonica allora è ANALITICA, ossia u è sviluppabile in serie di Taylor vicino ad ogni punto.

[Scriviamo il resto di TAYLOR di u in x_0 nella forma di LAGRANGE

$$\sum_{|\alpha|=m} \frac{\partial^\alpha u(\xi)}{\alpha!}(x-x_0)^\alpha, \quad \xi \in \text{segmento } [x_0, x]$$

$$\Rightarrow \left| \;''\; \right| \le |x-x_0|^m \sum_{|\alpha|=m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \frac{n^{|\alpha|} e^{|\alpha|-1}}{r^{|\alpha|}} \le C^m |x-x_0|^m$$

Quindi la serie di Taylor converge unif. in $B_r(x_0)$ se $r < \frac{1}{C}$, e converge ad $u(x)$].

OSS Altra proprietà in comune con le f. olomorfe:

TEOR [LIOUVILLE] Sia u armonica in $\mathbb{R}^n$ ed esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $u \ge c$ (oppure $u \le c$). Allora u è COSTANTE

[$u - c$ è armonica quindi basta supporre $u \geq 0$. Il lemma implica che $\forall x_0 \; \forall r$

$$|\partial u(x_0)| \le \frac{n}{r} u(x_0)$$

ma allora mandando $r \to +\infty \Rightarrow$
$\partial u(x_0) = 0 \quad \forall x_0 \Rightarrow u = \text{costante}$].

OSS Un'ultima proprietà di tipo "domato": le funzioni armoniche NON POSSONO OSCILLARE TROPPO: se u è armonica in Ω e $\omega \subset\subset \Omega$, allora esiste c t.c. $\frac{1}{c} u(y) \le u(x) \le c\, u(y)$ $\forall x, y \in \omega$. PIÙ PRECISAMENTE:

./.

TEOR. [disug. di HARNACK] Sia Ω aperto di $\mathbb{R}^n$, ω aperto connesso $\subset\subset \Omega$.
Allora esiste $C(\omega,\Omega)>0$ tale che per ogni funzione armonica u su Ω, non negativa, si ha $\sup_\omega u \le C \inf_\omega u$

[Notiamo che se $B_r(y) \subseteq B_R(x) \subseteq \Omega$, allora (essendo $u \ge 0$) $\int_{B_r(y)} u \le \int_{B_R(x)} u$

$\Rightarrow \fint_{B_r(y)} u \le \frac{|B_R|}{|B_r|} \fint_{B_R(x)} u = \left(\frac{R}{r}\right)^n \fint_{B_R(x)} u$

e per la p. della media $u(y) \le \left(\frac{R}{r}\right)^n u(x)$

Ora sia $R = \frac{1}{4}\operatorname{dist}(\omega, \partial\Omega)$, scegliamo due punti $x, y \in \omega$ tali che $|x-y| \le R$, e osserviamo che

$$B_R(y) \subseteq B_{2R}(x) \subseteq \Omega \Rightarrow u(y) \le 2^n u(x)$$
$$B_R(x) \subseteq B_{2R}(y) \subseteq \Omega \Rightarrow u(x) \le 2^n u(y)$$

e quindi $2^{-n} u(y) \le u(x) \le 2^n u(y)$ $\forall x, y \in \omega$, $|x-y| \le r$.

Ora ricopriamo $\bar\omega$ con un n° finito N di palle di raggio r, $B_1, \dots, B_N$; essendo ω connesso possiamo supporre che $B_j \cap B_{j+1} \neq \emptyset$ per $j = 1, \dots, N-1$. Allora $\forall x, y \in \omega$ otteniamo

$$2^{-Nn} u(y) \le u(x) \le 2^{Nn} u(y)$$

da cui la tesi].

PRINC. del MASSIMO FORTE per F. ARMONICHE

TEOR Ω aperto di $\mathbb{R}^n$ limitato, $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. ARMONICA in Ω.

(i) si ha $\max\limits_{\overline{\Omega}} u = \max\limits_{\partial\Omega} u$

(ii) Se Ω è connesso ed esiste $x_0 \in \Omega$ tale che
$$u(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} u$$
allora
$$u \text{ è costante su } \overline{\Omega}.$$

OSS (i) = principio del massimo

(ii) = principio del massimo forte.

Valgono ovviamente anche i principi del MINIMO: basta applicare (i), (ii) a $-u$.

[(ii): se esiste x_0 come nell'enunciato, allora vale $B_r(x_0) \subseteq \Omega$ e applicando la proprietà della media si ha
$$\max_{\overline{\Omega}} u \equiv M = u(x_0) = \fint_{B_r(x_0)} u$$
e quindi $\int_{B_r(x_0)} [M-u]\,dy = 0$, ma $M-u \geq 0$

da cui $M-u \equiv 0$ cioè u è costante.

Il punto (i) segue da (ii)

(se $\max\limits_{\overline{\Omega}} u = u(x_0)$, $x_0 \in \Omega$, x_0 deve appartenere ad una compon. connessa di Ω e u deve essere costante su di essa)].

TEOREMI di ESIST. & UNICITÀ: SOLUZIONI CLASSICHE

Veniamo alla parte costruttiva. Vorremmo trovare condizioni (necessarie e) sufficienti per risolvere il problema di POISSON-DIRICHLET

$$\boxed{(PD)\ \begin{cases} \Delta u = f & \text{su } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases}}$$

su un aperto limitato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.

L'ideale sarebbe il

DREAM THEOREM: $\forall f \in C(\Omega)$, $\forall \varphi \in C(\partial\Omega)$ $\exists!\ u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar\Omega)$ soluzione di (PD)

Purtroppo il DREAM THEOREM è FALSO!

CONTROESEMPIO: $n=2$, $u(x,y) = |x|\cdot|y| \log(|x|+|y|)$ soddisfa $|u| \le c$, $|\Delta u| \le c$ su $B_1(0)$, ma $\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right| \ge c|\log(|x|+|y|)|$ quindi Δu è limitata ma le derivate seconde di u NO

TUTTAVIA, almeno la parte relativa all'unicità è corretta

TEOR [UNICITÀ per (PD)] Se $u, v \in C^2(\Omega) \cap C(\bar\Omega)$ (Ω aperto limitato $\mathbb{R}^n$) soddisfano $\Delta u = \Delta v$ in Ω, $u|_{\partial\Omega} = v|_{\partial\Omega}$, allora $u \equiv v$

[Basta osservare che $w = u - v$ soddisfa $\Delta w = 0$, $w|_{\partial\Omega} = 0$, e per il princ. del massimo $\max_{\bar\Omega} w = \max_{\partial\Omega} w = 0$ cioè $w \le 0$. Applicando lo stesso ragionamento a $-w$ si conclude $w \equiv 0$].

Il problema dell'ESISTENZA è molto più delicato. Per il caso OMOGENEO, cioè il problema di LAPLACE-DIRICHLET

$$\boxed{(LD) \quad \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u_{|\partial\Omega} = \varphi \end{cases}}$$

un risultato di PERRON dà un quadro completo della situazione. Serve una definizione:

<u>DEF</u> Un punto $\xi \in \partial\Omega$ si dice <u>REGOLARE</u> se esiste una BARRIERA per Ω in ξ. Una BARRIERA per Ω in ξ è una funzione $w_\xi(x)$ con le seguenti proprietà:

(i) $w_\xi \in C(\overline{\Omega})$;

(ii) $w_\xi(\xi) = 0$ e $w_\xi > 0$ in $\overline{\Omega} \setminus \{\xi\}$;

(iii) w_ξ è SUPERARMONICA in Ω (ossia, $w_\xi(x) \geq \fint_{B_r(x)} w_\xi \quad \forall B_r(x) \subseteq \Omega$).

<u>TEOR</u> [PERRON: $\exists!$ in (LD)]. Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$. Il problema (LD) ammette una e una soluzione $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ per ogni $\varphi \in C(\partial\Omega)$ SE E SOLO SE tutti i punti di $\partial\Omega$ sono regolari

[Vedi GILBARG-TRUDINGER Cap. 2].

Per risolvere il caso NON OMOGENEO è necessario rafforzare le ipotesi su f.

<u>DEF</u> Ω aperto di $\mathbb{R}^n$. Diciamo che f è (LOCALMENTE) <u>HÖLDERIANA</u> di esponente $\alpha \in]0,1[$ in Ω se $\forall x_0 \in \Omega$ esiste U intorno di x_0 tale che

$$\sup_{\substack{x,y \in U \\ x \neq y}} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty .$$

lo spazio delle funzioni (LOC.) HÖLDERIANE in Ω si indica $C^{\alpha}(\Omega)$. Con $C^{k,\alpha}(\Omega)$ si indica lo spazio delle $C^{k}(\Omega)$ le cui derivate k-esime sono in $C^{\alpha}(\Omega)$.

TEOR [esistenza per (PD)] Ω aperto limitato di $\mathbb{R}^n$, $\alpha \in]0,1[$. Per ogni $f \in C^{\alpha}(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega)$ e per ogni $\varphi \in C(\partial\Omega)$ esiste una e una sola soluzione $u \in C^{2,\alpha}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ del pb. (PD)

[DIM vedi GILBARG-TRUDINGER Cap 4].

__OSS__ Nel caso $f \in C(\overline{\Omega})$ ma non C^{α}, il meglio che si riesce a dimostrare è che esiste una soluzione $u \in C^{1,\beta}(\Omega)$ $\forall \beta < 1$ ma non C^2.

FORMULE ESPLICITE

In alcuni (POCHI) casi è possibile dare formule di rappresentazione esplicite per le soluzioni del laplaciano, utili da conoscere.

1 SOLUZIONE FONDAMENTALE

L'equazione $\Delta u = 0$ ha soluzioni RADIALI cioè $u(x) = v(|x|)$? Usando le identità $\partial_j |x| = x_j/|x|$, $\partial_j \, x_j/|x| = 1/|x| - x_j^2/|x|^3$ si ha

$$\Delta u(x) \equiv v''(|x|) + \frac{n-1}{|x|} v'(|x|)$$

QUINDI l'eq. è

$$v'' + \frac{n-1}{r} v' = 0 \iff (r^{n-1} v')' = 0$$

$$\iff v' = \text{cost} \cdot r^{1-n} \iff$$

$$\begin{cases} \text{se } n \geq 3, & v(r) = c_1 + c_2 r^{2-n} \\ \text{se } n = 2, & v(r) = c_1 + c_2 \log r \end{cases}$$

(se $n = 1$ $\quad v(r) = c_1 + c_2 r$ banale).

NOTARE che tutte le soluzioni non costanti sono singolari in $|x| = 0$.

DEF La SOLUZ. FONDAMENTALE del LAPLACIANO è la funzione

$$E(x) := \begin{cases} (2\pi)^{-1} \log |x| & \text{se } n = 2 \\ \dfrac{|x|^{2-n}}{\omega_n (2-n)} & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

PROPRIETÀ di $E(x)$

1. $\Delta E = 0$ per $x \neq 0$ [dalla costruzione].
2. Se $\varphi \in C^2_c(\mathbb{R}^n)$,

$$\boxed{\int E(x) \cdot \Delta \varphi \, dx \equiv -\int \nabla E \cdot \nabla \varphi \, dx = \varphi(0)}$$

[Limitiamoci al caso $n = 3$ cioè $E = -(4\pi |x|)^{-1}$. Usiamo il fatto che per $\varepsilon \to 0$

$$⨍_{S_\varepsilon(0)} \varphi \to \varphi(0) \quad \text{CIOÈ} \quad \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|x|=\varepsilon} \varphi \, dS \cdot \varepsilon^{1-n} = \omega_n \varphi(0)$$

e che
$$\fint_{B_\varepsilon(0)} \varphi \to \varphi(0) \quad \text{cioè} \quad \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|x|\le\varepsilon} \varphi(x)dx \cdot \varepsilon^{-n} = \frac{\omega_n}{n}\varphi(0).$$

Allora,
$$\int_{|x|>\varepsilon} \frac{1}{|x|}\partial_j^2\varphi\, dx = -\int_{|x|\geq\varepsilon}\partial_j \frac{1}{|x|}\partial_j\varphi + \int_{|x|=\varepsilon}\frac{1}{|x|}\nu_j\partial_j\varphi\, dS$$
$$= \int_{|x|\geq\varepsilon}\left(\partial_j^2 \frac{1}{|x|}\right)\cdot\varphi - \int_{|x|=\varepsilon}\partial_j\frac{1}{|x|}\cdot\nu_j\varphi + \int_{|x|=\varepsilon}\frac{1}{|x|}\nu_j\partial_j\varphi$$

ma $\nu_j = -\frac{x_j}{|x|}$, $\partial_j \frac{1}{|x|} = -\frac{x_j}{|x|^3}$ e sommando su j
$$\int_{|x|>\varepsilon}\frac{1}{|x|}\Delta\varphi\, dx = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{(perché } \Delta\frac{1}{|x|}=0 \text{ per } |x|\neq 0)}}{0} - \int_{|x|=\varepsilon}\frac{\Sigma x_j^2}{|x|^4}\varphi - \int_{|x|=\varepsilon}\frac{\Sigma x_j\partial_j\varphi}{|x|^2}$$
$$= -\varepsilon^{-2}\int_{|x|=\varepsilon}\varphi\, dS - \varepsilon^{-1}\int_{|x|=\varepsilon}\Sigma x_j\partial_j\varphi\, dS$$

Il 2° termine tende a $\quad \omega_n(\Sigma x_j\partial_j\varphi)|_{x=0} = 0$

Il 1° termine tende a
$$-\omega_n\varphi(0) = -4\pi\varphi(0)$$

QUINDI per $\varepsilon\to 0$ otteniamo
$$\int\frac{\Delta\varphi}{|x|} = -4\pi\varphi(0) \Rightarrow \int\Delta\varphi\cdot E = \varphi(0).$$

L'altra identità $\int\nabla\varphi\cdot\nabla E = \varphi(0)$ segue fermandosi alla prima integrazione per parti
$$\int_{|x|>\varepsilon}\frac{1}{|x|}\Delta\varphi = -\int_{|x|\geq\varepsilon}\nabla\cdot\frac{1}{|x|}\cdot\nabla\varphi + \int_{|x|=\varepsilon}\frac{1}{|x|}\nu\cdot\nabla\varphi\, dS$$

e procedendo come sopra].

TEOR Se $f\in C_c^2(\mathbb{R}^n)$, la funzione $u(x) = E * f$ è di classe $C^2(\mathbb{R})$ e soddisfa $\Delta u = f$

Quindi le solus. di $\Delta u = f$ si scrivono $u = \int E(x-y)f(y)dy$

[$f\in C^2 \Rightarrow u\in C^2$. Inoltre $\Delta(E*f) =$
$$= \int E(y)\Delta f(x-y)\,dy \quad \text{e dato che } \int E\Delta\varphi = \varphi(0)$$
$$\Rightarrow \quad = f(x-0) = f(x) \quad \text{cioè} \quad \Delta u(x) = f(x)\ ].$$

OSS Abbiamo dim. che $\boxed{\Delta E = \delta_0}$.

② FORMULA di POISSON nella SFERA

La soluzione di $\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } B_1(0) \\ u = \varphi & \text{in } S_1(0) = \partial B_1(0) \end{cases}$

si può rappresentare nella forma

$$\boxed{u(x) = \int_{|y|=1} \frac{1-|x|^2}{\omega_n |x-y|^n} \varphi(y)\, dS_y}$$

per qualunque $\varphi \in L^1(\partial B_1)$. Notare che

(i) u è ARMONICA in $B_1(0)$ [derivare sotto il segno di integrale notando che $\frac{1-|x|^2}{|x-y|^n}$ è armonica in x]

(ii) se $\varphi \in C(\partial B_1)$, $\forall x_0 \in \partial\Omega$ si ha $\lim_{x\to x_0} u(x) = \varphi(x_0)$ [la funzione $\int_{\partial B_1} \frac{1-|x|^2}{\omega_n |x-y|^n} dS_y$ è RADIALE, è armonica in $B_1(0)$ e non è singolare in 0, quindi deve essere costante. Poiché per $x=0$ si riduce a $\int_{\partial B_1} \frac{dS_y}{\omega_n |y|^n} = 1 \Rightarrow$ vale sempre 1.

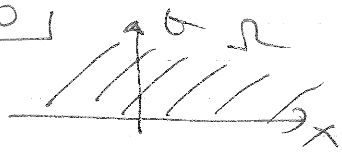
QUINDI $u(x) - \varphi(x_0) = \frac{1-|x|^2}{\omega_n} \int_{|y|=1} \frac{\varphi(y)-\varphi(x_0)}{|x-y|^n} dS_y$

e questo integrale tende a 0 per $x \to x_0$].

(iii) se $\varphi \in L^p(\partial\Omega)$ con $1 \le p < \infty$, posto $u_r(y) = u(ry)$ per $|y|=1$, si ha $u_r \to \varphi$ in $L^p(\partial B_1)$

[omettiamo i dettagli: basta approssimare φ con $\varphi_j \in C(\partial\Omega)$].

(3) FORMULA di POISSON nel SEMISPAZIO



$\Omega = \{(x,t) : x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0\}$

Scriviamo $\Delta_{n+1} u = \Delta_x u + \partial_t^2 u$

La soluzione del problema $\begin{cases} \Delta_{n+1} u = 0 & \text{su } \Omega \\ u(x,0) = \varphi(x) & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$

si scrive $\boxed{u(x,t) = P_t * \varphi}$ dove

$$P_t(x) = t^{-n} P_1(x/t), \qquad P_t(x) = \frac{2t}{\omega_{n+1}(t^2+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}}$$

OSSIA

$$\boxed{u(x,t) = \frac{2t}{\omega_{n+1}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\varphi(y)}{(t^2+|x-y|^2)^{\frac{n+1}{2}}}\, dy}$$

Valgono ancora le proprietà

(i) $\Delta_{n+1} u = 0$ su $t > 0$

(ii) $\lim_{t \downarrow 0} u(x,t) = \varphi(x)$ se $\varphi \in C(\mathbb{R}^n)$

(iii) se $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$, allora
$u(x,t) \to \varphi(x)$ in L^p per $t \downarrow 0$.

TEOREMI di ESISTENZA e UNICITA': SOLUZIONI DEBOLI

Il principale ostacolo a dei buoni risultati di esistenza nel caso classico era l'uso di spazi funzionali INADATTI ad ottenere risultati precisi. Vediamo che scegliendo spazi ADATTATI al problema la soluzione diventa facilissima, a patto di modificare il nostro concetto di soluzione. Anzitutto gli spazi:

DEF Ω aperto di $\mathbb{R}^n$. Una funzione $u \in L^2(\Omega)$ si dice di classe $H^1(\Omega)$ se le sue derivate $\partial_1 u, \dots, \partial_n u$ nel senso di $\mathcal{D}'(\Omega)$ sono anch'esse funzioni $L^2(\Omega)$. Allora si pone

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} := \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum \|\partial_j u\|^2_{L^2(\Omega)}$$

e questa si chiama la NORMA H^1 di u.
Per $u, v \in H^1(\Omega)$ si definisce il PRODOTTO SCALARE

$$(u,v)_{H^1(\Omega)} := (u,v)_{L^2(\Omega)} + \sum (\partial_j u, \partial_j v)_{L^2(\Omega)}$$

che rende $H^1(\Omega)$ uno spazio di Hilbert [facile].

DEF Chiaramente $C^\infty_c(\Omega) \subseteq H^1(\Omega)$. La chiusura di C^∞_c nella norma H^1 si indica con $H^1_0(\Omega)$.

OSS Quindi se $u \in H^1_0(\Omega)$ esiste una successione $u_j \in C^\infty_c(\Omega)$ tali che $u_j \to u$ in norma H^1.
Si interpreta $H^1_0(\Omega)$ come "LO SPAZIO delle FUNZIONI $H^1(\Omega)$ che SI ANNULLANO su $\partial\Omega$":

$$\text{“} u \in H^1_0(\Omega) \iff u \in H^1(\Omega) \text{ e } u|_{\partial\Omega} = 0 \text{”}$$

(Si può dare un senso preciso a questa affermazione).

OSS Anche $H^1_0(\Omega)$ è uno spazio di HILBERT, con la norma e il prodotto scalare indotti da quelli di $H^1(\Omega)$.

Δ 19

DEF Lo spazio duale di $H^1_0(\Omega)$ si indica con $\boxed{H^{-1}(\Omega)}$: quindi $u \in H^{-1}(\Omega)$ è un funzionale lineare continuo da $H^1_0(\Omega) \to \mathbb{C}$, e $H^{-1}(\Omega)$ è uno spazio di HILBERT per la norma (duale)

$$\|u\|_{H^{-1}(\Omega)} \equiv \sup_{\|\varphi\|_{H^1_0}=1} |u(\varphi)| .$$

OSS Sia $u \in H^{-1}(\Omega)$. Il teor. di rappresentaz. di RIESZ (per gli spazi di Hilbert) garantisce l'esistenza di un UNICO $u_0 \in H^1_0(\Omega)$ tale che

$$u(\varphi) = (\varphi, u_0)_{H^1_0(\Omega)} \qquad \forall \varphi \in H^1_0(\Omega)$$

e inoltre

$$\|u\|_{H^{-1}(\Omega)} \equiv \|u_0\|_{H^1_0(\Omega)}$$

Questo vuol dire

$$u(\varphi) = (\varphi, u_0)_{L^2(\Omega)} + \sum_{j=1}^{n} (\partial_j \varphi, \partial_j u_0)_{L^2(\Omega)}$$

cioè, usando la notazione di $\mathcal{D}'$,

$$u(\varphi) = \overline{u}_0(\varphi) + \sum \overline{\partial_j u_0}\,(\partial_j \varphi)$$

$$\equiv \overline{u}_0(\varphi) - \sum \overline{\partial_j^2 u_0}\,(\varphi).$$

In altri termini abbiamo nel senso di $\mathcal{D}'$

$$u = \overline{u}_0 - \sum \partial_j^2 \overline{u}_0 \equiv (1-\Delta)\overline{u}_0$$

Abbiamo dimostrato che ogni elemento $u \in H^{-1}(\Omega)$ è una distribuzione di $\mathcal{D}'(\Omega)$, e precisamente $= (1-\Delta)u_0$ per una certa $u_0 \in H^1_0(\Omega)$. Inoltre $\|u\|_{H^{-1}} = \|u_0\|_{H^1_0}$ quindi $(1-\Delta)$ è una ISOMETRIA

$$1-\Delta : H^1_0(\Omega) \to H^{-1}(\Omega) \quad \text{ISOMETRIA}.$$

OSS Un modo equivalente di rappresentare $u \in H^{-1}(\Omega)$: ogni $u \in H^{-1}(\Omega)$ si scrive nella forma

$$u = f_0 + \partial_1 f_1 + \dots + \partial_n f_n$$

per certe $f_0, f_1, \dots, f_n \in L^2(\Omega)$ (non uniche), e

$$\|u\|^2_{H^{-1}(\Omega)} = \inf \{ \|f_0\|^2_{L^2} + \dots + \|f_n\|^2_{L^2} \text{ al variare di tutte le rappres. } u = f_0 + \partial_1 f_1 + \dots + \partial_n f_n \}$$

[$\leq$ perché $|u(\varphi)|^2 \leq \|\varphi\|_{H^1} \cdot (\sum \|f_j\|^2)^{1/2}$

$\geq$ perché si può scegliere $f_0 = u_0$, $f_j = -\partial_j u_0$ e si ha l'uguaglianza].

IL CONCETTO di SOLUZIONE DEBOLE

Nel seguito scriveremo, se $f \in H^{-1}(\Omega)$ e $\varphi \in H^1_0(\Omega)$

$$\int_\Omega f \cdot \varphi \, dx \quad \text{invece di } f(\varphi)$$

Questa notazione è molto più piacevole e intuitiva ma fate attenzione! in genere f è una DISTRIBUZIONE (derivata di f. L^2) e quindi il prodotto $f \cdot \varphi$ non ha senso (puntuale).

Consideriamo il problema

$$\boxed{(PD_0) \begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u_{|\partial\Omega} = 0 \end{cases}}$$

(TUTTO a VALORI REALI, per semplicità)

dove $f \in H^{-1}(\Omega)$ è assegnata

DEF $u \in H^1_0(\Omega)$ è SOLUZIONE DEBOLE di (PD_0) se

$$\int_\Omega Du \cdot D\varphi + \int_\Omega f \cdot \varphi = 0 \qquad \forall \varphi \in H^1_0(\Omega)$$

OSS La CONDIZIONE al BORDO $u_{|\partial\Omega} = 0$ è contenuta nella richiesta che

$$u \in H^1_0(\Omega)$$

(cioè u è di classe H^1 e "si ANNULLA al BORDO").

OSS Un modo per trattare dati al bordo generali

$$\boxed{(PD) \begin{cases} \Delta u = f \\ u_{|\partial\Omega} = \varphi \end{cases}} \qquad f \in H^{-1}(\Omega)$$

è assegnare il dato φ come una funzione definita su tutto Ω: $\varphi \in H^1(\Omega)$, e chiedere che

$$(\widetilde{PD}) \begin{cases} \Delta u = f \\ u - \varphi \in H^1_0(\Omega) \end{cases}$$

Notare che se si pone $v = u - \varphi$, basta risolvere

$$\begin{cases} \Delta v = g, & g = f - \Delta\varphi \in H^{-1} \\ v_{|\partial\Omega} = 0 & (\text{cioè } v \in H^1_0(\Omega)) \end{cases}$$

quindi in questo modo basta risolvere il problema nel caso $\varphi \equiv 0$.

OSS In realtà è possibile dare un senso all' OPERATORE DI TRACCIA che associa a $u \in H^1(\Omega)$ una funzione $u_{|\partial\Omega}$ definita su $\partial\Omega$ (ad esempio se $\partial\Omega$ è di classe C^1).
Sorvoliamo su questo approccio che richiede molta più tecnologia.

QUINDI nel seguito ci concentreremo nella soluzione del problema (PD_0).
Per semplicità prendiamo tutto a VALORI REALI.

Vediamo che la scelta degli spazi funzionali è così efficiente che la soluzione diventa BANALE:

TEOR $\forall f \in H^{-1}(\Omega)$, $\exists! u \in H^1_0(\Omega)$ sol. debole di (PD_0)

[Poniamo $((u,v)) := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx$.

a) $((u,v))$ è un PRODOTTO SCALARE su $H^1_0(\Omega)$.
Infatti è LINEARE e SIMMETRICO (ovvio),
$((u,u)) \geq 0$, $((u,u)) = 0$ se e solo se $u = 0$
$[\|\nabla u\|_{L^2} = 0 \Rightarrow \nabla u = 0$ q.o. $\Rightarrow u = \text{cost.} \Rightarrow u = 0]$

b) $H := H^1_0(\Omega)$ col prodotto $((u,v))$ è uno sp. di Hilbert: infatti $((u,v))$ è un prod. scalare, e la completezza segue dall'equivalenza $((u,u)) \cong \|u\|^2_{H^1}$ [$\leq$ ovvia, inoltre $((u,u)) = \|\nabla u\|^2_{L^2} \geq c\|u\|^2_{L^2}$ per la disug. di POINCARÉ (v. sotto)]

c) Basta applicare il teor. di rappres. di RIESZ al funzionale $F(v) = -\int_\Omega v f \, dx$ che è continuo su H a valori in $\mathbb{R}$ [è ben definito, lineare, e $|F(v)| \leq \|f\|_{H^{-1}} \cdot \|v\|_{H^1} \cong$
$\cong \|f\|_{H^{-1}} \cdot ((v,v))^{1/2}$]. Ne segue che esiste $u \in H^1_0(\Omega)$ tale che $F(v) = ((u,v))$ $\forall v \in H^1_0$ cioè $-\int v f = \int \nabla u \cdot \nabla v$ $\forall v$]

OSS A partire dalla soluzione debole, con varie stime piuttosto raffinate, è possibile riottenere i risultati classici.

OSS La soluzione debole può essere ottenuta anche come risultato di un principio VARIAZIONALE, detto il PRINCIPIO di DIRICHLET: l'unica soluzione debole di (PD_0), costruita nel teorema precedente, coincide con l'unica funzione $v \in H^1_0(\Omega)$ che MINIMIZZA il funzionale $J : H^1_0(\Omega) \to \mathbb{R}$

$$\boxed{J(v) := \int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx + \int_\Omega f v \, dx}$$

[Fissiamo $u_0 \in H^1_0$ e $\forall v \in H^1_0$ poniamo

$$\varphi_v(t) := J(u_0 + tv) =$$
$$= \int |\nabla u_0|^2 + 2t \int \nabla u_0 \cdot \nabla v + t^2 \int |\nabla v|^2 + \int f u_0 + t \int f v$$
$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \varphi_v(t) = 2 \int \nabla u_0 \cdot \nabla v + 2t \int |\nabla v|^2 + \int f v$$

(1) Se u_0 è soluz. debole $\Rightarrow \varphi_v'(0) = 0 \quad \forall v \in H^1_0$
$\Rightarrow J(u_0 + tv) > J(u_0) \quad \forall t \neq 0, \; v \not\equiv 0$
$\Rightarrow u_0$ è l'unico MINIMO di J

(2) Se u_0 è minimo di $J \Rightarrow \varphi_v'(0) = 0 \quad \forall v$
cioè u_0 è sol. debole].

OSS Il principio di Dirichlet è alla base del CALCOLO delle VARIAZIONI.

OSS Il principale vantaggio del metodo delle soluzioni deboli è che permette di trattare operatori MOLTO GENERALI invece di Δ:

$$\sum (a_{ij}(x) u_{x_j})_{x_i} + \sum b_j(x) u_{x_j} + c(x) u$$

praticamente con la stessa facilità.

EQUAZIONE delle ONDE $\square$

Notazioni: $u(t,x) : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$\square u = \partial_t^2 u - \partial_{x_1}^2 u - \dots - \partial_{x_n}^2 u$$
$$= \partial_t^2 u - \Delta_x u$$

L'equazione $\boxed{\square u = f}$ è collegata a fenomeni OSCILLATORI (oscillaz. meccaniche, onde elettromagnetiche, particelle relativistiche)

La prima domanda come al solito è:

QUAL è il PROBLEMA CORRETTO per $\square u = f$?

ESEMPIO $\boxed{n=1}$ ($\mathbb{R}^{n+1}$, attenzione!)

$$u_{tt} - u_{xx} = f(t,x)$$

Notiamo che $\square = \partial_t^2 - \partial_x^2 = (\partial_t - \partial_x)(\partial_t + \partial_x)$ cioè $\square$ è la composizione di DUE OPERATORI del TRASPORTO. Questo suggerisce un modo di produrre SOLUZIONI:

$u(t,x) = \varphi(x+t)$ è sol. di $u_t - u_x = 0$

$\Rightarrow \square u = 0$!

$u(t,x) = \psi(x-t)$ è sol. di $u_t + u_x = 0$

$\Rightarrow \square u = 0$!

Mettendo tutto insieme abbiamo già molte soluzioni:

$$\boxed{u(t,x) = \varphi(x+t) + \psi(x-t)}$$

Sorpresa: TUTTE le soluzioni di $u_{tt} - u_{xx} = 0$ si scrivono in questa forma. Comunque, abbiamo capito che $\square$ è intimamente collegato all'eq. del trasporto, e sospettiamo che il problema giusto sia il PB di CAUCHY. Essendo l'eq. del 2° ordine, ci aspettiamo

DUE condizioni iniziali, come per il PB di Cauchy per l'equazione ordinaria

$$y'' = f(t, y, y'), \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1 .$$

$$\boxed{\text{PROBLEMA di CAUCHY per } \square,\ n=1}$$

$$\boxed{\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 \\ u(0,x) = u_0(x) \\ u_t(0,x) = u_1(x) \end{cases}}$$ caso omogeneo

Tentiamo di costruire una soluz. del tipo

$$u(t,x) = \varphi(x+t) + \psi(x-t)$$

a $t=0$ si ha

$$u(0,x) = \varphi(x) + \psi(x) \equiv u_0(x) \Rightarrow \varphi' + \psi' = u_0'$$

$$u_t(0,x) = \varphi'(x) - \psi'(x) \equiv u_1(x)$$

QUINDI

$$\varphi' = \frac{u_1 + u_0'}{2}, \qquad \psi' = \frac{-u_1 + u_0'}{2}$$

e prendo alle primitive

$$\varphi = \frac{1}{2}\left(\int u_1 + u_0\right), \quad \psi = \frac{1}{2}\left(-\int u_1 + u_0\right)$$

Conclusione: dato che

$$u(t,x) = \varphi(x+t) + \psi(x-t)$$

otteniamo

$$\boxed{u(t,x) = \frac{u_0(x+t) + u_0(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} u_1(s)\,ds}$$

[verificare: FUNZIONA]

Passiamo al problema NON OMOGENEO.

La riduzione NON OMOGENEO $\rightarrow$ OMOGENEO si può fare applicando un metodo generale.

PRINCIPIO di DUHAMEL

Poniamo $y(t) = \int_0^t z(t-s,s)\,ds$; $z' = \frac{d}{dt} z$

① Se $z(t,s)$ risolve
$$\begin{cases} z'(t,s) + Az = 0 \\ z(0,s) = f(s) \end{cases}$$
allora y risolve
$$\begin{cases} y'(t) + Ay = f(t) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

② Se $z(t,s)$ risolve
$$\begin{cases} z''(t,s) + Az = 0 \\ z(0,s) = 0 \\ z'(0,s) = f(s) \end{cases}$$
allora y risolve
$$\begin{cases} y''(t) + Ay = f(t) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

ECCETERA

[Verifica molto facile:

①: $y(0) = 0$; $y'(t) = z(t-t,t) + \int_0^t z'(t-s,s)\,ds$

e quindi $y'(t) = f(t) - Ay$.

②: $y'(t) = 0 + \int_0^t z'(t-s,s)\,ds \Rightarrow$

$y''(t) = z'(t-t,t) + \int_0^t z''(t-s,s)\,ds$

e quindi $y'' = f(t) - Ay$. eccetera]

Nella dimostrazione abbiamo usato il fatto che A è un operatore lineare, che la derivata rispetto a t passa sotto il segno di integrale, e che $A \int g = \int Ag$. Queste operazioni sono lecite in molte situazioni diverse quindi la riduzione da non omogeneo a omogeneo funziona in molti casi.

OSS Un'altra osservazione utile, più elementare:

Se $W(t)$ risolve
$$\begin{cases} W'' + AW = 0 \\ W(0) = 0 \\ W'(0) = y_0 \end{cases}$$
allora $y(t) = W'$ risolve
$$\begin{cases} y'' + Ay = 0 \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

[$W''' + AW' = 0 \Rightarrow y'' + Ay = 0$; $y(0) = W'(0) = y_0$; $y'(0) = \underset{=0}{AW(0)}$]

$\boxed{\text{APPLICAZIONE a } \square}$

Supponiamo di saper risolvere il problema

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta_x u = 0 \\ u(0,x) = 0 \\ u_t(0,x) = u_1(x) \end{cases}$$

e indichiamo simbolicamente con $S(u_1) = u(t,x)$ la soluzione. Allora la soluzione del problema COMPLETO

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = f(t,x) \\ u(0,x) = u_0(x) \\ u_t(0,x) = u_1(x) \end{cases}$$

si rappresenta come

$$\boxed{u(t,x) = \frac{\partial}{\partial t} S(u_0) + S(u_1) + \int_0^t S(f(s,\cdot))(t-s)\,ds}$$

[Basta scrivere $u = u^{(1)} + u^{(2)} + u^{(3)}$ dove

$$\begin{cases} \square u^{(1)} = 0 \\ u^{(1)}(0,x) = u_0 \\ u^{(1)}_t(0,x) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \square u^{(2)} = 0 \\ u^{(2)}(0,x) = 0 \\ u^{(2)}_t(0,x) = u_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \square u^{(3)} = f \\ u^{(3)}(0,x) = 0 \\ u^{(3)}_t(0,x) = 0 \end{cases}$$

e applicare DUHAMEL a $u^{(3)}$ e l'osservaz. prec. a $u^{(1)}$].

<u>ESEMPIO</u> $\boxed{n=1}$, pb. NON OMOGENEO.

Abbiamo visto che $S(u_1)(t,x) = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} u_1(s)\,ds$

Allora $\frac{\partial}{\partial t} S(u_0)(t,x) = \frac{u_0(t+x) + u(x-t)}{2}$

e $\int_0^t S(f(s,\cdot))(t-s)\,ds = \frac{1}{2}\int_0^t \left(\int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} f(s,y)\,dy\right) ds$.

QUINDI la soluzione di

$$\begin{matrix} \square \\ n=1 \end{matrix} \quad \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = f(t,x) \\ u(0,x) = u_0(x) \\ u_t(0,x) = u_1(x) \end{cases}$$

si rappresenta come

$$(1) \quad \boxed{u(t,x) = \frac{u_0(x+t) + u_0(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} u_1(s)\,ds + \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x+s-t}^{x-s+t} f(s,y)\,dy\,ds}$$

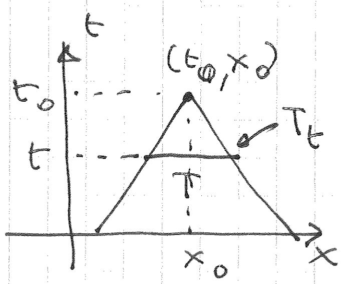
Siamo arrivati all'espressione (1) con delle considerazioni "astratte" (principio di Duhamel) ma è immediato verificare che se $u_0 \in C^2$, $u_1 \in C^1$ e $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ la formula (1) definisce una funzione $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ che risolve ($\square$, $n=1$) -

Un problema meno chiaro è l'UNICITÀ: chi ci garantisce che non esiste una SECONDA SOLUZIONE $v(t,x)$ che non è rappresentabile nella forma (1)?

Approfittiamone per introdurre un metodo che è utile in casi anche molto più generali.

$\boxed{\text{METODO dell'ENERGIA}}$

Supponiamo che $W(t,x)$ sia una soluzione C^2 di
$$\begin{cases} W_{tt} - W_{xx} = f(t,x) \\ W(0,x) = W_0(x) \\ W_t(0,x) = W_1(x) \end{cases}$$



Chiamiamo T il triangolo di vertice (t_0,x_0) e base $[x_0-t_0, x_0+t_0]$:
$$T(t_0,x_0) = \{(s,y) : 0 \le s \le t_0,\ x_0-t_0+s \le y \le x_0+t_0-s\}$$
(i lati hanno pendenze $+1$ e -1) -

Chiamiamo T_t la sezione orizzontale ad altezza t cioè il segmento $T_t = \{y : x_0-t_0+t \le y \le x_0+t_0-t\}$.

Definiamo l'ENERGIA di W come l'integrale di $W_t^2 + W_x^2$ nella variabile x sul segmento T_t:
$$\boxed{E(t) := \int_{x_0-t_0+t}^{x_0+t_0-t} [W_t^2(t,y) + W_x^2(t,y)]\, dy}$$

e proviamo a calcolare $E'(t)$.

Otteniamo vari termini:

$$E'(t) = \int_{T_t} [2w_{tt}w_t + 2w_{xt}w_x] + [w_t^2 + w_x^2]\Big|_{y = x_0+t_0-t} - [w_t^2 + w_x^2]\Big|_{y = x_0-t_0+t}$$

Il primo integrale, sostituendo $w_{tt} = w_{xx} + f$, dà

$$2\int_{T_t} [w_{xx}w_t + w_{xt}w_x + fw_t] = 2\int_{T_t} (w_x w_t)_x + 2\int_{T_t} f w_t$$

$$\equiv 2[w_x w_t]\Big|_{y = x_0-t_0+t}^{y = x_0+t_0-t} + 2\int_{T_t} f w_t$$

$$\leq [w_x^2 + w_t^2]\Big|_{y = x_0+t_0-t} + [w_x^2 + w_t^2]\Big|_{y = x_0-t_0+t} + 2\int_{T_t} f w_t$$

e quindi

$$E'(t) \leq 2\int_{T_t} f w_t \leq \int_{x_0-t_0+t}^{x_0+t_0-t} (f^2 + w_t^2)\, dy$$

$$\leq \int_{x_0-t_0+t}^{x_0+t_0-t} f^2 + E(t)$$

da cui, moltiplicando per e^{-t},

$$(E(t)\cdot e^{-t})' \leq e^{-t} \int_{x_0-t_0+t}^{x_0+t_0-t} f^2\, dy$$

e integrando

$$E(t)e^{-t} - E(0) \leq \int_0^t e^{-s} \int_{x_0-t_0+s}^{x_0+t_0-s} f^2(s,y)\, dy\, ds$$

$\Rightarrow$ otteniamo la STIMA dell'ENERGIA

$$(E) \quad \boxed{E(t) \leq e^t E(0) + \int_0^t e^{t-s} \int_{x_0-t_0+s}^{x_0+t_0-s} f^2(s,y)\, dy\, ds}$$

Notiamo che $\boxed{E(0) = \int_{x_0-t_0}^{x_0+t_0} [w_1^2(y) + (\partial_x w_0)^2]\, dy}$

Da questo conto semplicissimo deduciamo subito il risultato seguente:

Consideriamo il problema $\begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = f(t,x) \\ w(0,x) = w_0(x) \\ w_t(0,x) = w_1(x) \end{cases}$

dove $w_0 \in C^2$, $w_1 \in C^1$, $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

TEOR [DOMINIO di DIPENDENZA] Sia $w(t,x)$ una qualunque soluzione C^2 del problema di Cauchy. Se i dati w_0, w_1 si annullano sul segmento $[x_0 - t_0, x_0 + t_0]$ e il secondo membro f si annulla sul triangolo $T(t_0, x_0)$, allora necessariamente $w \equiv 0$ sul triangolo T.

[Abbiamo $E(0) \equiv 0$, $E(t) \leq 0 + 0$ per la stima dell'energia, quindi $w_t \equiv w_x \equiv$ $\equiv 0$ sul triangolo T cioè w è costante e quindi $w \equiv 0$ dato che $w_0 = w(0,x) \equiv 0$].

OSS Se allora u e v sono due soluzioni C^2 dello stesso problema ($\Box$ $n=1$), la loro differenza $w = u - v$ soddisfa

$$\Box w = 0, \quad w(0,x) = w_t(0,x) = 0$$

e quindi applicando il teor. precedente su un qualunque $T(t_0, x_0)$ abbiamo $w \equiv 0$ su $\mathbb{R}^2$.
Abbiamo dimostrato:

TEOR [$\exists$ e unicità per l'eq. delle onde 1D]
Il problema di Cauchy ($\Box$, $n=1$) ammette, per ogni $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$, $u_1 \in C^1(\mathbb{R})$, $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, un'unica soluzione $u(t,x) \in C^2(\mathbb{R}^2)$ che è data dalla formula (1).

$\boxed{\Box \text{ per } n \geq 1 : \text{METODO delle MEDIE SFERICHE}}$

Il metodo si basa su tre osservazioni.

<u>OSS 1</u> Se cerchiamo una soluzione RADIALE di $\Box u = 0$ nel caso di dim. $n \geq 0$, l'equazione si riduce a

$$(\Box_R) \quad v_{tt} = v_{rr} + \frac{n-1}{r} v_r \quad , \quad v(t, |x|) = u(t, x)$$

Ora se poniamo, nel caso n dispari $= 2k+1$,

$$V(t, r) = \left(\frac{1}{r} \partial_r\right)^{k-1} \left(r^{2k-1} v(t, r)\right)$$

scopriamo che V soddisfa l'equazione

$$V_{tt} - V_{rr} = 0$$

e quindi sappiamo già risolvere l'equazione delle onde radiale $(\Box_R)$, almeno se n è dispari.

<u>OSS 2</u> Se $u(t, x)$ risolve $\Box u = 0$, allora la sua MEDIA SFERICA

$$U(x_0; t, r) = \fint_{S_r(x_0)} u(t, y) \, dS_y$$

(rispetto a un qualunque punto fissato x) risolve l'eq. delle onde radiale:

$$U_{tt} = U_{rr} + \frac{n-1}{r} U_r \, .$$

<u>OSS 3</u> Se u risolve $\Box u = 0$ in dimensione n pari, allora $\tilde{u}(t, x, x_{n+1}) \equiv u(t, x)$ (aggiungiamo una variabile fittizia) risolve $\Box \tilde{u} = 0$ in dimensione $n+1$ dispari, con dati iniziali che non dipendono da x_{n+1}.

COMBINANDO questi fatti (e facendo MOLTI conti) si arriva al teorema:

TEOR [n dispari] Sia n dispari ≥ 3, sia $u_1 \in C^{\frac{n+1}{2}}(\mathbb{R}^n)$, allora

(DIS) $$u(t,x) = \frac{1}{(n-2)!!}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-3}{2}}\left(t^{n-2} \fint_{\partial B_t(x)} u_1(y)\, dS_y\right)$$

è di classe $C^2(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ e risolve

$$(\square, n)\begin{cases} \square u = 0 \\ u(0,x) = 0 \\ u_t(0,x) = u_1(x) \end{cases} \qquad \mathbb{R}^{n+1}_+ = [0,+\infty) \times \mathbb{R}^n$$

TEOR [n pari] Sia n pari ≥ 2, sia $u_1 \in C^{n/2+1}(\mathbb{R}^n)$, allora

(PA) $$u(t,x) = \left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-2}{2}}\left(t^n \fint_{B_t(x)} \frac{u_1(y)}{\sqrt{t^2 - |x-y|^2}}\, dy\right) \cdot \frac{1}{n!!}$$

è di classe $C^2(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ e risolve

$$(\square, n)\begin{cases} \square u = 0 \\ u(0,x) = 0 \\ u_t(0,x) = u_1(x) \end{cases}$$

OSS Le due formule (DIS) e (PA) rappresentano la soluzione del problema $(\square, n)$ omogeneo con dati iniziali $0, u_1$. Si tratta dell'operatore $S(u_1)$ che abbiamo già descritto per $n = 1$.
Procedendo come prima e usando il principio di Duhamel, la soluzione del pb completo

$$\begin{cases} \square u = f(t,x) \\ u(0,x) = u_0(x) \\ u_t(0,x) = u_1(x) \end{cases}$$

si rappresenta come

$$\boxed{u(t,x) = \frac{\partial}{\partial t} S(u_0) + S(u_1) + \int_0^t S(f(s,\cdot))(t-s)\, ds}$$

OSS Soffermiamoci sui due casi più importanti:

$\boxed{n=3}$ la formula diventa

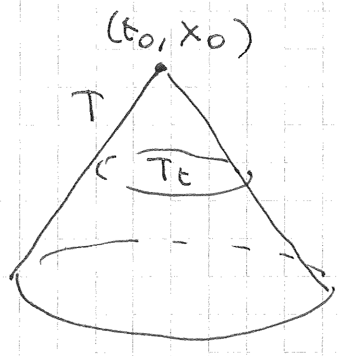
$$\boxed{S(u_1) = t \fint_{\partial B_t(x)} u_1(y)\, dS_y} \boxed{= \frac{1}{4\pi t} \int_{|x-y|=t} u_1(y)\, dS_y}$$

$\boxed{n=2}$

$$\boxed{S(u_1) = \frac{t^2}{2} \fint_{B_t(x)} \frac{u_1(y)}{\sqrt{t^2-|x-y|^2}}\, dy = \frac{1}{2\pi} \int_{|x-y|\le t} \frac{u_1(y)}{\sqrt{t^2-|x-y|^2}}\, dy}$$

Entrambe le formule sono dovute a POISSON (anche se la prima è spesso chiamata di KIRCHHOFF).
(la formula generale per $n \geq 3$ è di G. TEDONE)

OSS Anche in questo caso resta ancora da dimostrare l'UNICITÀ, e il metodo dell'energia si può estendere facilmente al caso di dimensione qualunque: basta definire



$$E(t) = \int_{T_t} [w_t^2 + |\nabla_x w|^2]\, dy$$

dove $T(t_0, x_0) = T$ è il cono

$$T = \{(s,y) : 0 \le s \le t_0,\ |y - x_0| \le t_0 - s\}$$

T_t è la sua sezione ad altezza t

$$T_t = \{y : |y - x_0| \le t_0 - t\}$$

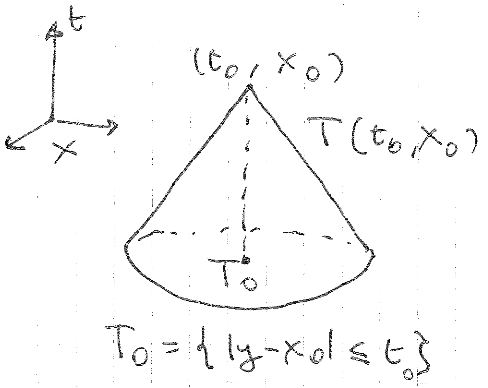
Se w risolve $\Box w = f$, $w(0) = w_0$, $w_t(0) = w_1$, si dimostra che per $0 \le t \le t_0$

$$E(t) \le e^t E(0) + \int_T |f|^2$$

dove $E(0) = \int_{|y-x_0|\le t_0} [w_1^2 + |\nabla w_0|^2]\, dy$.

Quindi se $w_0 = w_1 = 0$ alla base di T e $f \equiv 0$ su T, ne segue $w \equiv 0$ su T. Come per il caso $n=1$, questo dimostra l'UNICITÀ della soluzione per $(\Box, n)$.

PROPRIETÀ QUALITATIVE delle SOLUZIONE

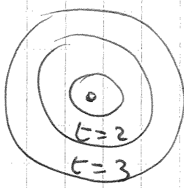


Esattamente come nel caso $n=1$, dalla formula generale per $n \geq 2$ vediamo che per calcolare il valore di una soluzione $u(t,x)$ del pb.

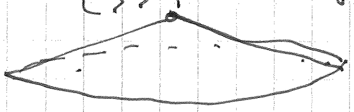
$$\Box u = f(t,x), \quad u(0,x)=u_0, \quad u_t(0,x)=u_1$$

— in un punto (t_0, x_0) $(t_0>0)$ è sufficiente conoscere i valori di f sul cono $T(t_0,x_0)$ che ha vertice in (t_0,x_0) e mantello di pendenza 1 (45° rispetto alla verticale = asse t, e i valori dei dati iniziali nella palla $T_0 = B_{t_0}(x_0)$ di centro x_0 e raggio t_0.

ANZI, se la dimensione è DISPARI $n \geq 3$, basta conoscere i valori di f sul MANTELLO (sup. laterale) di $T(t_0,x_0)$ e di u_0, u_1 sulla SFERA (superficie sferica) $S_{t_0}(x_0)$ di centro x_0 e raggio t_0. Questo si chiama PRINCIPIO di HUYGENS e mostra che le ONDE VIAGGIANO a VELOCITÀ di PROPAGAZIONE FINITA.



Il cono $T(t_0,x_0)$ si chiama DOMINIO di DIPENDENZA della soluzione. Notare che se $u_0=u_1=0$ alla base T_0 e $f=0$ su $T(t_0,x_0)$, allora $u\equiv 0$ su T, come già dimostrato con la STIMA dell'ENERGIA.



Se si considera la versione più generale

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = f$$

c = costante >0, le onde viaggiano a velocità c e il cono diventa sempre più schiacciato al crescere di c.

MINICORSO su DISTRIBUZIONI e TRASF. di FOURIER

Ci limitiamo a richiamare i punti essenziali che sono indispensabili, sorvolando sulle dimostrazioni.

DEF Ω aperto di $\mathbb{R}^n$. Lo spazio $\mathcal{D}(\Omega)$ delle FUNZIONI TEST è lo spazio $C_c^\infty(\Omega)$ munito della convergenza

$$\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{D}} 0 \;:\Longleftrightarrow\; \text{esiste } K \subset\subset \Omega \text{ t.c. } \operatorname{supp} \varphi_j \subseteq K \;\forall j,$$
$$\text{e } \partial^\alpha \varphi_j \to 0 \text{ UNIFORMEMENTE } \forall \alpha$$

DEF Una DISTRIBUZIONE su Ω è un funzionale lineare $u : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$, CONTINUO nel senso che

$$\forall \varphi_j \xrightarrow{\mathcal{D}} 0 \quad \text{si ha } u(\varphi_j) \to 0.$$

Lo spazio delle distribuzioni si indica $\mathcal{D}'(\Omega)$ e si munisce della CONVERGENZA nel senso di $\mathcal{D}'$:

$$u_j \xrightarrow{\mathcal{D}'} u \;:\Longleftrightarrow\; u_j(\varphi) \to u(\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

(nient'altro che la convergenza puntuale!)

OSS

1. Le funzioni $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ si possono immergere in $\mathcal{D}'(\Omega)$: ad u corrisponde la distribuzione
$$u(\varphi) := \int_\Omega u \cdot \varphi \, dx$$
spesso indicata con T_u (cioè $T_u(\varphi) = \int_\Omega u\varphi$)

2. L'IMMERSIONE $u \mapsto T_u$ da $L^1(\Omega)$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$ è INIETTIVA: se $T_u \equiv 0$, cioè se $\int_\Omega u\varphi = 0 \;\forall \varphi$ test, ALLORA $u \equiv 0$ q.o.

3. Se $0 \in \Omega$, la DELTA di DIRAC è la distribuzione definita da $\boxed{\delta(\varphi) := \varphi(0)}$

4. Se $u_j, u \in L^p(\Omega)$ e $u_j \to u$ in L^p, allora ($T_{u_j} \to T_u$ in $\mathcal{D}'$ cioè) $u_j \to u$ in $\mathcal{D}'$.

DERIVAZIONE in $\mathcal{D}'$

DEF Sia $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. La DERIVATA PARZIALE $\partial_j u$ (nel senso $\mathcal{D}'$) è la distribuz. definita da

$$\partial_j u(\varphi) := -u(\partial_j \varphi).$$

Quindi $\partial^\alpha u$ è definita $\forall \alpha$ e vale $\partial^\alpha u(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} u(\partial^\alpha \varphi)$

OSS (1) Vediamo che OGNI DISTRIBUZIONE si può derivare un numero arbitrario di volte.

(2) Se definiamo la FUNZIONE di HEAVISIDE $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ come

$$H(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

allora $\boxed{H' = \delta}$ nel senso di $\mathcal{D}'$

(3) Se $f \in C^1$, le derivate classiche coincidono con le derivate nel senso $\mathcal{D}'$, cioè

$$T_{\partial_j f} \equiv \partial_j T_f$$

(4) Se u è una $\mathcal{D}'(\Omega)$, ed esiste $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ tale che $u(\varphi) = \int_\Omega v \varphi \, dx$ $\forall \varphi$ test, diciamo semplicemente che "u è la funzione v".

(5) Se $u \in C(\Omega)$, e $\partial_j u$ nel senso $\mathcal{D}'$ è anch'essa una funzione $C(\Omega)$ $\forall j = 1, .., n$, allora u è C^1 (e $\partial_j u$ coincide con le derivate classiche).

(6) Se $u_j \to u$ in $\mathcal{D}'$ allora $\partial^\alpha u_j \to \partial^\alpha u_j$ in $\mathcal{D}'$ $\forall \alpha$.

MOLTIPLICAZIONE $C^\infty \cdot \mathcal{D}'$

DEF Se $a(x) \in C^\infty(\Omega)$ e $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ si definisce il PRODOTTO au come la distribuzione

$$au(\varphi) = u(a\varphi)$$

OSS ① $\partial_j(au) = \partial_j a \cdot u + a \cdot \partial_j u$

② Se $u \in \mathcal{D}'(I)$, I intervallo aperto di $\mathbb{R}$, e u' nel senso $\mathcal{D}'$ è identicamente nulla (cioè $u'(\varphi) = 0 \ \forall \varphi$) ALLORA u è una DISTRIBUZIONE COSTANTE c, il che vuol dire

$$u(\varphi) = \int c\varphi = c\int \varphi \quad \forall \varphi \text{ TEST.}$$

SUPPORTO di UNA DISTRIBUZIONE

Se $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, e ω è un aperto $\subseteq \Omega$, diciamo che u SI ANNULLA su ω se $u(\varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\omega)$.

DEF Sia $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Il SUPPORTO di u è il complementare (in Ω) dell'unione di tutti gli aperti contenuti in Ω su cui u si annulla.

OSS $\operatorname{supp} \delta = \operatorname{supp} \partial^\alpha \delta = \{0\} \quad \forall \alpha$.

Vale anche (una specie di) VICEVERSA:

TEOR Sia $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, tale che $\operatorname{supp} u = \{0\}$. Allora esistono $M \in \mathbb{N}_0$ e $c_\alpha \in \mathbb{C}$ tali che

$$u = \sum_{|\alpha| \leq M} c_\alpha \partial^\alpha \delta$$

DISTRIBUZIONI TEMPERATE

DEF Una funzione $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ si dice <u>RAPIDAMENTE DECRESCENTE</u> se $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $x^\alpha \partial^\beta \varphi \in L^\infty$ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$. Lo spazio delle f. rapid. decr. si indica $\mathscr{S}$ e si chiama SPAZIO di SCHWARTZ. Su $\mathscr{S}$ si pone la CONVERGENZA

$$\varphi_j \to 0 \text{ in } \mathscr{S} :\Leftrightarrow x^\alpha \partial^\beta \varphi_j \to 0 \text{ UNIFORM. su } \mathbb{R}^n \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$$

DEF Una <u>DISTRIBUZIONE TEMPERATA</u> è un funzionale lineare $u : \mathscr{S} \to \mathbb{C}$ CONTINUO nel senso che

$$\forall \varphi_j \xrightarrow{\mathscr{S}} 0 \quad \text{si ha} \quad u(\varphi_j) \to 0 .$$

Lo spazio delle distribuzioni temperate si indica con $\mathscr{S}'$ e si munisce della CONVERGENZA nel senso $\mathscr{S}'$:

$$u_j \xrightarrow{\mathscr{S}'} u \ :\Leftrightarrow\ u_j(\varphi) \to u(\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathscr{S}$$

(sempre la conv. PUNTUALE!)

OSS ① $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{S}$, e se $\varphi_j \xrightarrow{\mathscr{D}} \varphi$ allora $\varphi_j \xrightarrow{\mathscr{S}} \varphi$.

② Se $\varphi_j \xrightarrow{\mathscr{S}} \varphi$ allora $\partial^\alpha \varphi_j \xrightarrow{\mathscr{S}} \partial^\alpha \varphi$ $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n$.

③ $\mathscr{S}'$ è un SOTTOSPAZIO di $\mathscr{D}'$, $(\Omega = \mathbb{R}^n)$, nel senso seguente: se $u \in \mathscr{S}'$, la sua restrizione a $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ dà un elemento di $\mathscr{D}'$.

④ $\forall p \in [1, \infty]$ si ha $L^p(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathscr{S}'$ con la solita immersione che a $u \in L^p$ fa corrispondere $T_u \in \mathscr{S}'$ definita da $T_u(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} u \varphi \, dx$.

TRASFORMATA di FOURIER

DEF Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ la sua TRASFORMATA di FOURIER è la funzione
$$\hat{f}(\xi) := \int e^{-ix\cdot\xi} f(x)\,dx$$
$(x\cdot\xi = x_1\xi_1 + \dots + x_n\xi_n)$. L'operatore $f \longmapsto \hat{f}$ si indica con $\mathcal{F}$, e quindi $\hat{f} = \mathcal{F}f$.

TEOR [FORMULA di INVERSIONE di FOURIER]
Se $f \in L^1$ e $\hat{f} \in L^1$, allora per q.o. x si ha
$$f(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\cdot\xi} \hat{f}(\xi)\,d\xi$$

OSS ① Se $f \in L^1$, $\|\hat{f}\|_{L^\infty} \le \|f\|_{L^1}$, quindi $\mathcal{F}$ è un operatore limitato da L^1 a L^∞

② Se $f \in L^1 \cap C^1$ con $xf \in L^1$, allora $\forall j = 1, .., n$
$$\partial_{\xi_j} \hat{f} = \mathcal{F}\left(\tfrac{1}{i} x_j f\right), \quad \xi_j \hat{f} = \mathcal{F}\left(\tfrac{1}{i}\partial_{x_j} f\right)$$
(e analogamente
$$\partial^\alpha_\xi \hat{f} = \mathcal{F}\left(i^{-|\alpha|} x^\alpha f\right), \quad \xi^\alpha \hat{f} = \mathcal{F}\left(i^{-|\alpha|} \partial^\alpha_x f\right).$$

③ Se $f \in \mathcal{S}$ allora $\hat{f} \in \mathcal{S}$ (e viceversa).

④ Se f è una GAUSSIANA $f = e^{-a|x|^2}$, $a > 0$ allora $\hat{f} = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{n/2} e^{-|\xi|^2/4a}$

⑤ $\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ è INIETTIVA e SURIETTIVA.

⑥ $\int \hat{f} g = \int f \hat{g}$ $\forall f, g \in \mathcal{S}$ (anzi $f, g \in L^1$).

⑦ Posto $\bar{\mathcal{F}} f := \int e^{ix\cdot\xi} f(x)\,dx$, si ha
$$\mathcal{F}^{-1} = (2\pi)^{-n} \bar{\mathcal{F}} \text{ e}$$

⑧ $(\mathcal{F}f, g)_{L^2} = (f, \bar{\mathcal{F}} g)_{L^2}$ $\forall f, g \in \mathcal{S}$.

⑨ PLANCHEREL: $\|\hat{f}\|_{L^2} = (2\pi)^{-n/2} \|f\|_{L^2}$ $\forall f \in \mathcal{S}$.

⑩ $\mathcal{F}$ si estende ad una ISOMETRIA $\mathcal{F} : L^2 \to L^2$.

⑪ $\mathcal{F}(f * g) = \hat{f} \cdot \hat{g}$; $\mathcal{F}(f \cdot g) = (2\pi)^{-n} \hat{f} * \hat{g}$

TRASFORMATA di FOURIER in $\mathcal{S}'$

Ricordando che $\int \hat{f} g = \int f \hat{g}$ $\forall f, g \in L^1$, è naturale definire $\mathcal{F}$ su $\mathcal{S}'$ nel modo seguente:

DEF La TRASFORMATA di FOURIER di $u \in \mathcal{S}'$ è la distribuzione temperata $\hat{u}$ data da
$$\hat{u}(\varphi) := u(\hat{\varphi})$$
L'operatore $u \longmapsto \hat{u}$ si indica sempre con $\mathcal{F}$.

OSS (1) Se $u_j \xrightarrow{\mathcal{S}'} u$ allora $\hat{u}_j \xrightarrow{\mathcal{S}'} \hat{u}$.

(2) Vale la formula di inversione in $\mathcal{S}'$
$$\overline{\mathcal{F}} \mathcal{F} u = \mathcal{F} \overline{\mathcal{F}} u = (2\pi)^n u$$
quindi $\mathcal{F} : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ è iniettiva e suriettiva (e continua per la convergenza $\mathcal{S}'$), e $\mathcal{F}^{-1} = (2\pi)^{-n} \overline{\mathcal{F}}$.

(3) $\partial_\xi^\alpha \hat{u} = \mathcal{F}(i^{-|\alpha|} x^\alpha u)$, $\xi^\alpha \hat{u} = \mathcal{F}(i^{-|\alpha|} \partial_x^\alpha u)$.

(4) Se $u \in L^2$, abbiamo due definizioni per $\hat{u}$: una tramite l'estensione L^2 di $\mathcal{F}$, e una tramite la definizione di $\mathcal{F}$ su $\mathcal{S}'$ (infatti $L^2 \subseteq \mathcal{S}'$). Ma le due definizioni COINCIDONO.

$\boxed{\text{SPAZI di SOBOLEV } H^s}$

Notazione : $\langle \xi \rangle = (1+|\xi|^2)^{1/2}$ $(\xi \in \mathbb{R}^n)$.

DEF Sia $s \in \mathbb{R}$. Lo <u>SPAZIO di SOBOLEV H^s</u> è lo spazio delle distr. temperate $u \in \mathcal{S}'$ tali che $\langle \xi \rangle^s \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. H^s è uno spazio di HILBERT per il prodotto scalare

$$(u,v)_{H^s} := \int \langle \xi \rangle^{2s} \hat{u}(\xi) \overline{\hat{v}(\xi)} \, d\xi$$

che genera la norma

$$\|u\|_{H^s} = \|\langle \xi \rangle^s \hat{u}\|_{L^2}$$

<u>OSS</u> Notare che, in particolare, se $u \in H^1$ allora $\hat{u}$ è una FUNZIONE $(\in L^1_{loc})$.

<u>DEF</u> L^2_s è lo spazio delle funzioni u tali che $\langle \xi \rangle^s u \in L^2$, con il prodotto scalare

$$(u,v)_{L^2_s} = \int \langle \xi \rangle^{2s} u(\xi) \overline{v(\xi)} \, d\xi$$

e la norma $\|u\|_{L^2_s} = \|\langle \xi \rangle^s u\|_{L^2}$.

<u>OSS</u> (1) $\mathcal{F} : H^s \to L^2_s$ è una ISOMETRIA

(2) $H^0 = L^2$

(3) Se $s \geq r$ allora $H^s \subseteq H^r$ con immersione continua. In particolare, le $u \in H^s$ per $s \geq 0$ sono FUNZIONI (se $s<0$ NO! in generale).

(4) Se $k \geq 0$ è INTERO, la norma H^k è equivalente a

$$\|u\|^2_{H^k} \simeq \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha u\|^2_{L^2}.$$

(5) $\mathcal{S}$ è DENSO in H^s, $\forall s \in \mathbb{R}$.

(6) Se $s > n/2$ allora $\|u\|_{L^\infty} \leq C_s \|u\|_{H^s}$.

(7) Il duale di H^s è isometrico a H^{-s}:

$$(H^s)' \cong H^{-s} \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

SPAZI di FUNZIONI DIPENDENTI dal TEMPO

Nello studio delle equazioni di evoluzione le variabili NON SONO TUTTE UGUALI: tipicamente la soluzione $u(t,x)$ dipende da $(t,x) \in \mathbb{R}^{1+n}$, in cui una variabile $t \in \mathbb{R}$ ha un ruolo diverso dalle altre $x = (x_1, .., x_n) \in \mathbb{R}^n$. Allora è utile considerare u come una funzione di t a valori in uno spazio di funzioni di x:

$$u(t,x) \simeq u(t) : \mathbb{R} \to X$$

dove X è un opportuno spazio di funzioni (o distribuzioni). QUINDI è necessario studiare spazi di funzioni "DIPENDENTI dal TEMPO".

Nel seguito X è uno SPAZIO VETTORIALE TOPOLOGICO (cioè: sp. vettoriale e topologico per cui l'applicazione $(\lambda, x, y) \mapsto \lambda x + y$ da $\mathbb{C} \times X \times X$ in X è continua), mentre I è un INTERVALLO di $\mathbb{R}$.

① $\boxed{C(I;X) \text{ e } C^k(I;X)}$ $k = 0,1,2,\dots,\infty$.

La definizione di funzione CONTINUA $u : I \to X$ è già nota ($C = C^0$). Per definire C^k introduciamo la DERIVATA CLASSICA u' come il LIMITE in X del rapporto incrementale

$$u'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{u(t+h) - u(t)}{h}$$

(notare che qui si usa la struttura vettoriale di X). Se il limite esiste $\forall t$, u si dice DERIVABILE in senso classico, e se $u' \in C(I;X)$ si dice che $u \in C^1(I;X)$.

La definizione di C^k, C^∞ è analoga.

② $\boxed{\mathcal{D}'(I;X)}$ Una DISTRIBUZIONE sull'intervallo APERTO $I \subseteq \mathbb{R}$ A VALORI in X è un funzionale lineare $u : \mathcal{D}(I) \to X$ che sia CONTINUO nel senso

$$\forall \varphi_j \xrightarrow{\mathcal{D}} 0 \quad \text{si ha } u(\varphi_j) \xrightarrow{X} 0 .$$

La DERIVATA DISTRIBUZIONALE (in $\mathcal{D}'$) di u è definita come l'elemento $\partial_t u \in \mathcal{D}'(I;X)$ dato da

$$\partial_t u(\varphi) = -u(\varphi') \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(I).$$

Infine diremo che $u_j \xrightarrow{\mathcal{D}'} u$ in $\mathcal{D}'(I;X)$ se $u_j(\varphi) \xrightarrow{X} u(\varphi)$ $\forall \varphi \in \mathcal{D}(I)$.

Vale la proprietà:

PROP Sia $u \in \mathcal{D}'(I;X)$ tale che $\partial_t u = 0$. Allora u è COSTANTE (cioè $\exists c \in \mathbb{C} : u(\varphi) = \int \varphi \cdot c \ \forall \varphi$).

[DIM [Facoltativa] Fissiamo $\varphi_0 \in \mathcal{D}(I)$ con $\int_I \varphi_0 = 1$, allora la costante deve essere $c = u(\varphi_0)$.
VERIFICHIAMO: presa $\psi \in \mathcal{D}(I)$, la funzione

$$\tilde{\psi} := \psi - \varphi_0 \cdot \int_I \psi$$

è ancora in $\mathcal{D}(I)$ ed ha media nulla cioè

$$\int \tilde{\psi} = \int \psi - \int \varphi_0 \cdot \int \psi \equiv 0 .$$

Se poniamo $\chi(t) = \int_{-\infty}^t \tilde{\psi}(s)\,ds$, vediamo allora che $\chi \in \mathcal{D}(I)$ e $\chi' = \tilde{\psi}$. Per ipotesi

$$u(\tilde{\psi}) = u(\chi') = -\partial_t u(\chi) \equiv 0$$

il che implica

$$u(\psi) = u(\varphi_0) \int \psi = c \int \psi \quad] .$$

OSS Se in particolare $X = \mathcal{D}'(\Omega)$, con Ω aperto di $\mathbb{R}^n$, vale l'ISOMORFISMO

$$\mathcal{D}'(I; \mathcal{D}'(\Omega)) \cong \mathcal{D}'(I \times \Omega)$$

con le stesse convergenze.

[DIM (CENNO) FACOLTATIVA.

($\supseteq$): presa $v \in \mathcal{D}'(I \times \Omega)$, definiamo $u \in \mathcal{D}'(I; \mathcal{D}'(\Omega))$ così: $\forall \varphi(t) \in \mathcal{D}(I)$, $\psi(x) \in \mathcal{D}'(\Omega)$,

$$u(\varphi(t))(\psi(x)) := v(\varphi(t)\psi(x)).$$

($\subseteq$): Sia $\mathcal{D}_0$ il sottospazio di $\mathcal{D}(I \times \Omega)$ delle funzioni che si scrivono come una somma finita $\sum_{j=1}^{N} \varphi_j(t)\psi_j(x)$, $N \geq 1$, per $\varphi_j \in \mathcal{D}(I)$ e $\psi_j \in \mathcal{D}(\Omega)$. Si dimostra (abb. facilmente) che $\mathcal{D}_0$ è DENSO in $\mathcal{D}(I \times \Omega)$. Ora, data $u \in \mathcal{D}'(I; \mathcal{D}'(\Omega))$, possiamo definire v su $\mathcal{D}_0$ come

$$v\left(\sum \varphi_j(t)\psi_j(x)\right) = \sum u(\varphi_j(t))(\psi_j(x))$$

e poi estendere v ad un elemento di $\mathcal{D}'(I \times \Omega)$ per DENSITA'].

OSS Sia $u \in \mathcal{D}'(I; \mathcal{D}'(\Omega))$. La derivata distribuzionale $\partial_t u$ si può calcolare sia come visto sopra, sia in $\mathcal{D}'(I \times \Omega)$ dato che i due spazi sono isomorfi. Ma le due derivate COINCIDONO [Basta verificare che coincidono nelle f. test della forma $\varphi(t)\psi(x)$, con $\varphi \in \mathcal{D}(I)$, $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$, e per esse la proprietà è OVVIA].

OSS Se $u \in C(I;X)$, $I=[a,b]$,
si può definire l'INTEGRALE di RIEMANN

$$\int_a^b u(t)\,dt \quad \in X$$

al solito modo, come limite (in X) delle somme di Riemann

$$\sum_{j=1}^{N} (t_j - t_{j-1})\, u(t_j)$$

per una partizione $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$, al tendere a 0 della finezza della partizione $\delta = \max_j |t_j - t_{j-1}|$.

Vale anche il TEOREMA FONDAM. del CALCOLO: se $u \in C(I;X)$, $a \in I$, allora

$$U(t) := \int_a^t u(\tau)\,d\tau \;\in C^1(I;X)$$

e inoltre

$$U' = u .$$

OSS $\boxed{C(I;X) \subseteq \mathcal{D}'(I;X)}$ grazie alla solita identificazione: se $u \in C(I;X)$,

$$u(\varphi) := \int_I \varphi(t)\,u(t)\,dt \qquad (\in X).$$

OSS Se $u \in C^1(I;X)$, la derivata classica u' coincide con la derivata distribuz. $\partial_t u$
[infatti

$$\frac{u(t+h)-u(t)}{h}(\varphi) \equiv u\left(\frac{\varphi(t-h)-\varphi(t)}{h}\right).$$

Mandando $h \to 0$ si ottiene

$$u'(\varphi) \equiv u(-\partial_t \varphi)$$

e il secondo membro è proprio $\partial_t u(\varphi)$]

Vale anche il VICEVERSA:

$\boxed{\text{PROP Sia } u \in C(I;X). \text{ Se anche } \partial_t u \in C(I;X) \text{ allora } u \in C^1(I;X) \text{ e quindi } \partial_t u = u'}$

[DIM Poniamo $v = \partial_t u$ e $V = \int_a^t v(s)\,ds$, per una $a \in I$ fissato. Allora $\partial_t u = v = V' = \partial_t V$, quindi $\partial_t(u - V) = 0 \Rightarrow u = V + \text{cost.} \in C^1$].

GLI SPAZI $C^k H^s$

Ricordiamo che $(\langle\xi\rangle = (1+|\xi|^2)^{1/2})$ $(s \in \mathbb{R})$

1. $u \in L^2_s \Leftrightarrow \langle\xi\rangle^s u \in L^2$, $\|u\|_{L^2_s} := \|\langle\xi\rangle^s u(\xi)\|_{L^2}$
2. $u \in H^s \Leftrightarrow u \in \mathcal{S}'$ e $\hat{u} \in L^2_s$, $\|u\|_{H^s} := \|\hat{u}\|_{L^2_s}$

Quindi $\mathcal{F}: H^s \to L^2_s$ è un'isometria

NEL SEGUITO useremo gli spazi

$$C^k(\mathbb{R}; H^s), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad s \in \mathbb{R}$$

che indichiamo brevemente

$$C^k H^s \qquad (CH^s = C^0 H^s).$$

Inoltre useremo la trasformata di FOURIER di $u(t,x)$ SOLO RISPETTO a x, cioè

$$\hat{u}(t,\xi) = \mathcal{F}u = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi}\, u(t,x)\,dx.$$

PROPRIETÀ

1. $u \in CH^s \Leftrightarrow \hat{u} \in CL^2_s$ [$\mathcal{F}$ isometria: $H^s \to L^2_s$].
2. $u \in CH^s \Rightarrow \partial_t \hat{u} = \widehat{\partial_t u}$

   [presa $\varphi \in \mathcal{D}(I)$, $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, si ha
   $$\partial_t \hat{u}(\varphi(t))(\psi(x)) = -\hat{u}(\varphi')(\psi) = -u(\varphi')(\hat{\psi})$$
   $$\widehat{\partial_t u}(\varphi(t))(\psi(x)) = \partial_t u(\varphi)(\hat{\psi}) = -u(\varphi')(\hat{\psi})\ ].$$
3. $u \in C^1 H^s \Leftrightarrow \hat{u} \in C^1 L^2_s$. INOLTRE $\widehat{u'} = (\hat{u})'$

   [$u \in C^1 H^s \Leftrightarrow u, \partial_t u \in CH^s \Leftrightarrow \hat{u}, \partial_t \hat{u} \in CL^2_s \Leftrightarrow \hat{u} \in C^1 L^2_s$]
4. Analoga proprietà per $u \in C^k H^s \Leftrightarrow \hat{u} \in C^k L^2_s$.

EQUAZIONE delle ONDE e TRASFORMATA di FOURIER

Consideriamo di nuovo

$$(P)\begin{cases} u_{tt}-\Delta_x u = F(t,x) \\ u(0,x)=u_0(x) \\ u_t(0,x)=u_1(x) \end{cases}$$

Se $u_0, u_1, F \in C^k$ con k abb. grande, sappiamo già che la soluzione esiste unica e abbiamo delle formule di rappresentazione. Studiamo ora un approccio alternativo più moderno basato sulla TRASF. di FOURIER in x:

$$\hat{u}(t,\xi)=\mathcal{F}u=\int e^{-ix\cdot\xi}u(t,x)\,dx.$$

Formalmente, se applichiamo $\mathcal{F}$ a (P) abbiamo

$$(P_\xi)\begin{cases} \hat{u}_{tt}+|\xi|^2\hat{u}=\hat{F}(t,\xi) \\ \hat{u}(0,\xi)=\hat{u}_0(\xi) \\ \hat{u}_t(0,\xi)=\hat{u}_1(\xi) \end{cases}$$

Notiamo che (P_ξ) è un' EQUAZIONE ORDINARIA in t, per ogni $\xi\in\mathbb{R}^n$ fissato; quindi la variabile ξ è relegata al ruolo di un parametro. Senza alcuna ipotesi su $\hat{u}_0, \hat{u}_1$, e supponendo $\hat{F}(t,\xi)$ continua in t, possiamo scrivere la soluz. di (P_ξ):

$$(1)\quad \boxed{\hat{u}(t,\xi)=\cos(t|\xi|)\hat{u}_0(\xi)+\frac{\operatorname{sen}(t|\xi|)}{|\xi|}\hat{u}_1(\xi)+\int_0^t\frac{\operatorname{sen}((t-\tau)|\xi|)}{|\xi|}\hat{F}(\tau,\xi)\,d\tau}$$

Notare che $\hat{u}(t,\xi)$ è C^∞ in t [la funzione $\frac{\operatorname{sen} s}{s}$ è C^∞, anzi analitica]. Ora non resta che TORNARE INDIETRO a (P) applicando $\mathcal{F}^{-1}$; gli spazi più adatti in cui lavorare sono del tipo

$$C^k H^s = C^k(\mathbb{R};H^s).$$

Introduciamo le notazioni

$$\cos(t|D|)\,u_0 = \mathcal{F}^{-1}(\cos(t|\xi|)\,\hat{u}_0(\xi))$$

$$\frac{\mathrm{sen}(t|D|)}{|D|}\,u_1 = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sen}(t|\xi|)}{|\xi|}\,\hat{u}_1(\xi)\right)$$

$$\int_0^t \frac{\mathrm{sen}((t-\tau)|D|)}{|D|}F(\tau,\cdot)\,d\tau = \int_0^t \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sen}((t-\tau)|\xi|)}{|\xi|}\hat{F}(\tau,\xi)\right)d\tau$$

TEOR Sia $s \in \mathbb{R}$. Per ogni $u_0 \in H^s$, $u_1 \in H^{s-1}$, $F \in CH^{s-1}$, il problema (P) ammette una soluzione unica (soluz. nel senso di $\mathcal{D}'$) $u \in CH^s \cap C^1H^{s-1}$. Inoltre $u \in C^k H^{s-k}$ $\forall k$ e in particolare $\partial_t^2 u = u''$ (derivata classica in C^2H^{s-2}).

[DIM Dato che $u_0 \in H^s \Rightarrow \hat{u}_0 \in L^2_s \Rightarrow \cos(t|\xi|)\hat{u}_0 \in L^2_s$ $\forall t$, usando il teor. della convergenza dominata si verifica subito che

$$\cos(t|\xi|)\,\hat{u}_0(\xi) \in C L^2_s.$$

Inoltre $\partial_t(\cos(t|\xi|)\hat{u}_0(\xi)) = -|\xi|\,\mathrm{sen}(t|\xi|)\hat{u}_0$ e quindi

$$\cos(t|\xi|)\,\hat{u}_0(\xi) \in C^1 L^2_{s-1}$$

e così via. In conclusione

$$\cos(t|\xi|)\,\hat{u}_0(\xi) \in C^k L^2_{s-k} \quad \forall k = 0,1,2,\dots$$

Applicando $\mathcal{F}^{-1}$ otteniamo

$$\cos(t|D|)\,u_0 \in C^k H^{s-k} \quad \forall k = 0,1,2,\dots$$

Passiamo al secondo termine in (1). Dato che

$$\left|\frac{\mathrm{sen}(t|\xi|)}{|\xi|}\right| \le \frac{|t|\,|\xi|}{|\xi|} = |t|, \quad \left|\frac{\mathrm{sen}(t|\xi|)}{|\xi|}\right| \le \frac{1}{|\xi|}$$

otteniamo $\forall t, \xi$

$$\left|\frac{\mathrm{sen}(t|\xi|)}{|\xi|}\right| \le 2\cdot\frac{1+|t|}{\langle\xi\rangle}$$

Quindi, se $u_1 \in H^{s-1}$, procedendo come sopra otteniamo

$$\frac{\operatorname{sen}(t|\xi|)}{|\xi|}\hat{u}_1(\xi) \in C^k L^2_{s-k}, \quad k=0,1,2\dots$$

e quindi

$$\frac{\operatorname{sen}(t|D|)}{|D|} u_1 \in C^k H^{s-k}, \quad k=0,1,2\dots$$

In modo simile si dimostra che

$$\int_0^t \frac{\operatorname{sen}((t-\tau)|D|)}{|D|} F(\tau,\cdot)\,d\tau \in C^k H^{s-k}$$

MA SOLO per $k=0,1,2$: non si può derivare più di 2 volte perchè F è solo continua.

Abbiamo così dimostrato che se applichiamo $\mathcal{F}^{-1}$ alla funzione $\hat{u}(t,\xi)$ data dalla formula (1) otteniamo una funzione

$$u(t,x) \in CH^s \cap C^1H^{s-1} \cap C^2H^{s-2}$$

Inoltre, dato che $-\Delta_x u = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^2\hat{u})$ e $\partial_t^2 u = \mathcal{F}^{-1}(\partial_t^2\hat{u})$, vediamo che u risolve il problema (P) sia interpretando $\partial_t^2 u$ nel senso delle distrib. sia come derivata classica in C^2H^{s-2}.

Resta da verificare l'UNICITÀ: se $u \in CH^s \cap C^1H^{s-1}$ risolve il problema (P), applicando $\mathcal{F}$ vediamo che $\hat{u} = \mathcal{F}u$ risolve (P_ξ) che ha soluzione unica per i teoremi sulle eq. ordinarie].

TRASF. di FOURIER di GAUSSIANE COMPLESSE

GAUSS 1

Ricordiamo la formula

$$\widehat{e^{-a|\xi|^2}} = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{n/2} e^{-|x|^2/4a}, \quad a>0.$$

Scriviamola in una forma equivalente:

(1) $$\boxed{\mathcal{F}^{-1}(e^{-a|\xi|^2}) = (2\pi)^{-n}\int e^{ix\cdot\xi}e^{-a|\xi|^2}d\xi = \left(\frac{1}{4\pi a}\right)^{n/2} e^{-\frac{|x|^2}{4a}}}$$

Vogliamo dimostrare che nella (1) la costante a si può prendere COMPLESSA, purché $\operatorname{Re} a \geq 0$.

PRIMO PASSO: estensione a $\operatorname{Re} a > 0$.

Consideriamo per $z\in\mathbb{C}$ con $\operatorname{Re} z>0$ le funzioni

$$f(z) = (2\pi)^{-n}\int e^{ix\cdot\xi}e^{-z|\xi|^2}d\xi$$

$$g(z) = \left(\frac{1}{4\pi z}\right)^{n/2} e^{-|x|^2/4z}$$

dove $z^{1/2}$ è scelta in modo che $\operatorname{Re} z^{1/2}>0$.

Vediamo subito che f, g sono olomorfe su $\operatorname{Re} z>0$ inoltre $f(z)=g(z)$ se $z=a\in\mathbb{R}^+$ (per la formula (1)) e quindi $f\equiv g$ cioè

(2) $$\boxed{\mathcal{F}^{-1}(e^{-z|\xi|^2}) = \left(\frac{1}{4\pi z}\right)^{n/2} e^{-\frac{|x|^2}{4z}}}$$

$\forall z\in\mathbb{C}$ con $\operatorname{Re} z>0$ (e $\operatorname{Re} z^{1/2}>0$).

SECONDO PASSO: estensione a $\operatorname{Re} a = 0$.

Notiamo che $\forall\varphi\in\mathcal{S}$, $t\in\mathbb{R}$

$$\lim_{\lambda\downarrow 0}\int e^{-(\lambda+it)|\xi|^2}\varphi(\xi)d\xi = \int e^{-it|\xi|^2}\varphi(\xi)d\xi$$

(convergenza dominata). QUINDI

$$\lim_{\lambda\downarrow 0} e^{-(\lambda+it)|\xi|^2} = e^{-it|\xi|^2} \quad \text{in } \mathcal{S}'$$

(per definizione di convergenza in $\mathcal{S}'$).

Ma allora si ha anche, $\forall t\in\mathbb{R}$,

$$\lim_{\lambda\downarrow 0} \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-(\lambda+it)|\xi|^2}\right) = \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-it|\xi|^2}\right) \text{ in } \mathcal{S}'.$$

GAUSS 2

Analogamente

$$\lim_{\lambda\downarrow 0}\left(\frac{1}{4\pi(\lambda+it)}\right)^{n/2} e^{-\frac{|x|^2}{4(\lambda+it)}} = \left(\frac{1}{4\pi i t}\right)^{n/2} e^{-\frac{|x|^2}{4it}} \text{ in } \mathcal{S}'.$$

Allora se scriviamo la (2) per $z = \lambda + it$, $\lambda > 0$

$$\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-(\lambda+it)|\xi|^2}\right) = \left(\frac{1}{4\pi(\lambda+it)}\right)^{n/2} e^{-\frac{|x|^2}{4(\lambda+it)}}$$

possiamo passare al limite per $\lambda\downarrow 0$ (in $\mathcal{S}'$) e otteniamo la formula: $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$(7) \qquad \boxed{\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-it|\xi|^2}\right) = \left(\frac{1}{4\pi i t}\right)^{n/2} e^{-\frac{|x|^2}{4it}}}$$

dove $(it)^{1/2}$ deve avere parte reale ≥ 0 (cioè: $(it)^{1/2} = e^{i\pi/4}\sqrt{t}$ se $t \geq 0$, $e^{-i\pi/4}\sqrt{-t}$ se $t \leq 0$).

EQUAZIONE di SCHRÖDINGER

Il problema di Cauchy per l'eq. di Schrödinger è

$$(S)\begin{cases} iu_t + \Delta u = F(t,x) \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases}$$

Notare che u è NECESSARIAMENTE a valori complessi. Questa equazione è di importanza fondamentale in meccanica quantistica (e non solo).

Procedendo come per l'eq. delle onde, per $\hat{u} = \mathcal{F}u$ otteniamo l'eq. ordinaria col parametro ξ

$$(S_\xi)\quad \begin{cases} i\hat{u}_t - |\xi|^2\hat{u} = \hat{F}(t,\xi) \\ \hat{u}(0,\xi) = \hat{u}_0(\xi) \end{cases}$$

la cui unica soluzione si scrive

$$\boxed{\hat{u}(t,\xi) = e^{-it|\xi|^2}\hat{u}_0(\xi) - i\int_0^t e^{-i(t-\tau)|\xi|^2}\hat{F}(\tau,\xi)\,d\tau}$$

Introduciamo la notazione

$$e^{it\Delta}f = \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-it|\xi|^2}\hat{f}(\xi)\right)$$

allora la soluzione si può rappresentare (formalmente)

$$u(t,x) = e^{it\Delta}u_0 - i\int_0^t e^{i(t-\tau)\Delta}F(\tau,\cdot)\,d\tau.$$

TEOR Sia $s \in \mathbb{R}$. Per ogni $u_0 \in H^s$, $F \in CH^s$, il problema (S) ammette un'unica soluzione (nel senso delle $\mathcal{D}'$) $u \in CH^s$. Inoltre $u \in C^1H^{s-2}$.

[DIM identica all'eq. delle onde, anzi più facile].

OSS L'operatore $e^{it\Delta}$ si può rappresentare in FORMA INTEGRALE nel modo seguente: dato che

$$e^{it\Delta}f = \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-it|\xi|^2}\hat{f}(\xi)\right)$$

e ricordando che
$$\mathcal{F}^{-1}(f g) = (\mathcal{F}^{-1} f) * (\mathcal{F}^{-1} g)$$
abbiamo
$$e^{it\Delta} f = \mathcal{F}^{-1}(e^{-it|\xi|^2}) * \mathcal{F}^{-1}(\hat{f})$$
$$= \mathcal{F}^{-1}(e^{-it|\xi|^2}) * f$$
Abbiamo già calcolato
$$\mathcal{F}^{-1}(e^{-it|\xi|^2}) = \left(\frac{1}{4\pi i t}\right)^{n/2} e^{-\frac{|x|^2}{4it}}$$
quindi otteniamo la rappresentazione
$$\boxed{e^{it\Delta} f = \left(\frac{1}{4\pi i t}\right)^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4it}} f(y)\,dy}$$
[dove $(it)^{1/2} = e^{\pi i/4}\sqrt{t}$ se $t \geq 0$, $e^{-\pi i/4}\sqrt{-t}$ se $t \leq 0$].

<u>OSS</u> Notare che $e^{it\Delta} f$ è la soluzione del PB omogeneo
$$iu_t + \Delta u = 0, \qquad u(0,x) = f(x).$$
Nel teorema abbiamo visto che l'operatore $e^{it\Delta}$ è ben definito se $f = u_0 \in H^s$; ora la nuova formula mostra che $e^{it\Delta}$ si può estendere ad un operatore definito su $L^1(\mathbb{R}^n)$, e vale la stima
$$\boxed{\| e^{it\Delta} f \|_{L^\infty_x} \leq \frac{1}{|4\pi t|^{n/2}} \| f \|_{L^1}}$$
che si chiama STIMA DISPERSIVA.
Se invece si usa la proprietà che $\mathcal{F}$ è un'isometria L^2, si ottiene che $e^{it\Delta}$ CONSERVA LE NORME H^s:
$$\boxed{\| e^{it\Delta} f \|_{H^s} = \| \langle \xi \rangle^s e^{-it|\xi|^2} \hat{f} \|_{L^2} = \| f \|_{H^s}}$$
per ogni $s \in \mathbb{R}$.

EQUAZIONE del CALORE

Il pr. di Cauchy per l'eq. del calore è

$$(C)\begin{cases} u_t - \Delta u = F(t,x) \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases}$$

Col solito metodo $\hat{u}(t,\xi) = \mathcal{F}u$ otteniamo

$$(C_\xi)\begin{cases} \hat{u}_t + |\xi|^2\hat{u} = \hat{F}(t,\xi) \\ \hat{u}(0,\xi) = \hat{u}_0(\xi) \end{cases}$$

da cui

$$\hat{u}(t,\xi) = e^{-t|\xi|^2}\hat{u}_0(\xi) + \int_0^t e^{-(t-\tau)|\xi|^2}\hat{F}(\tau,\xi)\,d\tau .$$

Introducendo l'operatore

$$e^{t\Delta}f = \mathcal{F}^{-1}(e^{-t|\xi|^2}\hat{f})$$

otteniamo la rappresentazione formale

$$u(t,x) = e^{t\Delta}u_0 + \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta}F(\tau,\cdot)\,d\tau .$$

NOTIAMO però un PROBLEMA NUOVO:

se $u_0 \in H^s$, $F \in CH^s$ (come al solito)

① per $t>0$, nessun problema:

$$u_0 \in H^s \Rightarrow \hat{u}_0 \in L^2_s \Rightarrow e^{-t|\xi|^2}\hat{u}_0 \in L^2_s \Rightarrow e^{t\Delta}u_0 \in H^s$$

② per $t<0$, $e^{-t|\xi|^2}$ cresce ESPONENZIALMENTE quando $|\xi| \to +\infty$, quindi

$$\hat{u}_0 \in L^2_s \not\Rightarrow e^{-t|\xi|^2}\hat{u}_0 \in L^2_s \quad !$$

In altri termini: l'eq. del calore si può risolvere <u>solo nel verso $t \geq 0$</u>.

> **TEOR** Sia $s \in \mathbb{R}$. Per ogni $u_0 \in H^s$, $F \in CH^s$, il problema (C) ammette un'unica soluzione (nel senso $\mathcal{D}'$) $u \in C([0,+\infty); H^s)$. Inoltre $u \in C^1([0,+\infty); H^{s-2})$.

[solita dimostrazione].

IL NUCLEO del CALORE

Dato che $e^{t\Delta}f = \mathcal{F}^{-1}(e^{-t|\xi|^2}\hat{f}) =$
$$= \mathcal{F}^{-1}(e^{-t|\xi|^2}) * f,$$
esattamente come per l'eq. di Schrödinger possiamo rappresentare l'operatore $e^{t\Delta}$ in forma integrale: $\forall t > 0$,

$$\boxed{e^{t\Delta}f = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y)\,dy}$$

Naturalmente $e^{t\Delta}f$ è la soluzione del pb omogeneo
$$u_t - \Delta u = 0, \qquad u(0,x) = f(x).$$
La funzione
$$\boxed{p_t(x,y) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}}$$
si chiama NUCLEO del CALORE ed è molto importante. Elenchiamo qualche proprietà:

① REGOLARIZZAZIONE

$p_t(x,y)$ è C^∞ in t, x, y (se $t > 0$). Ne segue che
$$\boxed{f \in L^1 \Rightarrow e^{t\Delta}f \in C^\infty} \quad \forall t > 0$$
cioè la soluzione del pb. omogeneo è MOLTO PIÙ REGOLARE del dato iniziale $\forall t > 0$.
Questo si vede anche usando FOURIER: se $t > 0$
$$u_0 \in H^s \Rightarrow e^{t\Delta}u_0 \in H^r \quad \forall r \in \mathbb{R}$$
$$\left[\widehat{e^{t\Delta}u_0} = e^{-t|\xi|^2}\hat{u}_0 \in L^2_r \quad \forall r \in \mathbb{R}\right].$$

② POSITIVITÀ

Si ha $p_t(x,y) > 0$ $\forall t, x, y$ con $t > 0$. Ne segue
$$\boxed{\text{se } f \geq 0 \Rightarrow e^{t\Delta}f \geq 0}$$

La positività del nucleo ha varie conseguenze interamente. Ad esempio vale il PRINCIPIO DEL MASSIMO:

se $|f| \leq M$ allora $|e^{t\Delta} f| \leq M$ $\quad (t \geq 0)$

o anche,

$$\| e^{t\Delta} f \|_{L^\infty} \leq \| f \|_{L^\infty} .$$

(3) VELOCITÀ di PROPAGAZIONE INFINITA

Se $f \geq 0$, e $f > 0$ sulla palla $B_\varepsilon(x_0)$, allora $e^{t\Delta} f > 0$ su tutto $\mathbb{R}^n$ $\forall t > 0$! Questo segue dal fatto che $p_t(x,y) > 0$, quindi

$$\int p_t(x,y) f(y)\, dy = 0 \text{ in } x \Rightarrow f \equiv 0 .$$

OSS [FACOLTATIVA] Se M è una varietà Riemanniana, si può definire un analogo del LAPLACIANO su M che si chiama OPERATORE di LAPLACE-BELTRAMI. In modo analogo si può definire un NUCLEO del CALORE su M che ha proprietà simili a quelle viste sopra.

OSS L'impossibilità di risolvere l'eq. del calore per $t < 0$ (a meno di prendere dati molto speciali) si interpreta spesso come una espressione della IRREVERSIBILITÀ nella PROPAGAZIONE del CALORE (l'entropia non può diminuire).

SISTEMI IPERBOLICI

Consideriamo un SISTEMA di equazioni della forma

$$\boxed{(P)\begin{cases} U_t = \sum_{j=1}^{n} A_j \, u_{x_j} \\ U(0,x) = U_0(x) \end{cases}}$$

dove A_j sono n matrici $N \times N$, e

$$U : \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^n_x \to \mathbb{C}^N .$$

Useremo la notazione

$$a(D) = \sum_{j=1}^{n} A_j \, \partial_j$$

ossia $a(D)$ è una matrice di operatori

$$a(D) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \partial_1 + \dots + \alpha_n \partial_n & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \\ & & \end{pmatrix}$$

DEF Il sistema (P) si dice <u>IPERBOLICO</u> se la matrice
$$a(\xi) = \sum_{j=1}^{n} A_j \, \xi_j$$
ha autovalori TUTTI REALI per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$.

<u>OSS</u> Applicando come al solito la trasf. di F. in x otteniamo il sistema di eq. ordinarie

$$(P_\xi) \begin{cases} \partial_t \hat{U} = i\, a(\xi) \hat{U} \\ \hat{U}(0,\xi) = \hat{U}_0(\xi) \end{cases}$$

che sappiamo risolvere per qualunque dato iniziale $\hat{U}_0(\xi)$. La soluzione di (P_ξ) si scrive in forma simbolica

$$\boxed{\hat{U}(t,\xi) = e^{i a(\xi) t} \, \hat{U}_0(\xi)}$$

con l'esponenziale della matrice $i\,a(\xi)t$. Per tornare indietro con $\mathcal{F}^{-1}$, ci servono STIME.

ESPONENZIALE di una MATRICE

① Se $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$, indichiamo con $(A=(a_{ij}))$

$\|A\| = \max\limits_{|v|=1} |Av|$ la NORMA OPERATORE

$[A] = \max\limits_{i,j} |a_{ij}|$ la NORMA del MASSIMO

$[A = (a_{ij})_{i,j=1}^{N}, \quad |v|^2 = |v_1|^2 + \ldots + |v_N|^2]$

② Le norme $\|A\|$, $[A]$ sono EQUIVALENTI: infatti $\|A\| \leq [A]$ (facile) e $[A] \leq n^2\|A\|$ (quasi altrettanto facile).

③ Sia $\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_N\}$ lo spettro di A (cioè l'insieme degli autovalori di A). Allora

$\forall j = 1, \ldots, N: \quad |\lambda_j| \leq \|A\|$.

④ PRIMA RAPPRESENTAZIONE di e^{At}, $t \in \mathbb{R}$

Si può definire

$$e^{At} = \sum_{j\geq 0} \frac{A^j t^j}{j!}.$$

Si verifica facilmente che la serie converge in norma $\|\cdot\|$ e che $\|e^{At}\| \leq e^{\|A\|\cdot|t|}$.

⑤ SECONDA RAPPRESENTAZIONE di e^{At}

Se poniamo $B(t) = e^{At}$ (definita come in ④) si verifica subito che

$$(B) \begin{cases} B'(t) = AB(t) \\ B(0) = I \end{cases}$$

Questo sistema di eq. ordinarie ha soluzione unica, quindi e^{At} si può anche definire come l'UNICA SOLUZIONE del pb. di CAUCHY (B).

⑥ TERZA RAPPRESENTAZIONE di e^{At}

Se f è definita su un aperto di $\mathbb{C}$ a valori MATRICI $N \times N$, l'integrale curvilineo su una curva γ si definisce nel solito modo:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(z)\cdot\gamma'(t)\,dt$$

($\gamma \in C^1([a,b];\mathbb{C})$). Ora il risultato è una matrice, e vale la stima solita

$$\left\| \int_\gamma f(z)\,dz \right\| \le \max_\gamma \|f\| \cdot \ell(\gamma)$$

L'esponenziale di matrice si può definire anche con

$$\boxed{e^{At} = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial\Omega} e^{zt}(zI-A)^{-1}\,dz}$$

dove Ω è un aperto limitato che contiene gli autovalori di A, il cui bordo è unione di un numero finito di curve C^1 a tratti, e $+\partial\Omega$ indica che $\partial\Omega$ è percorso lasciando sempre Ω a sinistra.

NOTARE che $(zI-A)^{-1}$ è OLOMORFA per $z \notin \sigma(A)$, quindi se modifichiamo Ω prendendo un altro aperto con le stesse ipotesi, l'integrale non cambia, cioè la formula precedente non dipende dalla scelta di Ω.

Verifichiamo che l'integrale

$$B(t) := \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial\Omega} e^{zt}(zI-A)^{-1}\,dz$$

soddisfa il sistema (B), da cui segue che $B(t)$ è proprio l'esponenziale di matrice e^{At}.

[$\boxed{B(0)=I}$: scegliamo come $+\partial\Omega$ una circonferenza $\gamma_R = Re^{i\theta}$ di raggio abb. grande. Allora $(0 \le \theta \le 2\pi)$

$$B(0) \equiv \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R} \frac{(zI-A)+A}{z}(zI-A)^{-1}dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R}\frac{I}{z}dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R}\frac{A}{z}(zI-A)^{-1}dz$$

Il primo integrale è uguale a I.
Il secondo (che non dipende da R) si stima usando

$$\left\| \frac{A}{z}(zI-A)^{-1}\right\| \le \frac{C}{|z|^2} \quad \text{per } |z| \text{ grande}$$

da cui

$$\left\| \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R}\frac{A}{z}(zI-A)^{-1}dz\right\| \le \frac{C}{R^2}\,\ell(\gamma_R) = \frac{C'}{R} \to 0$$

mandando $R \to +\infty$, quindi il 2° integrale è 0.

$\boxed{B'(t) = AB}$:

$$B'(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial\Omega} z e^{zt}(zI-A)^{-1}dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{''} (zI-A+A)e^{zt}(zI-A)^{-1}dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{''} e^{zt}dz \cdot I + AB(t)$$

ma il 1° integrale fa 0 perché e^{zt} è olomorfa].

(4) STIMA di e^A

Vale la stima seguente:

PROP Se $\sigma(A) = \{\lambda_1, .., \lambda_N\}$ allora
$$\|e^A\| \le C_N (1+\|A\|)^{N-1} \cdot \max_{j=1,..,N} e^{Re \lambda_j}$$
dove la costante C_N dipende solo da N.

[DIM Sia Ω l'unione dei dischi di centro $\lambda_1, .., \lambda_N$ e raggio 1. Usiamo la rappresent. (5) cioè
$$e^A = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial\Omega} e^z (zI-A)^{-1} dz \implies$$
$$\implies \|e^A\| \le \ell(\gamma) \cdot \sup_{z\in\gamma} \|(zI-A)^{-1}\| \cdot \sup_{z\in\gamma} |e^z|$$
dove $\gamma = +\partial\Omega$. Innanzitutto, se $z \in \gamma$
$$|e^z| = e^{Re z}$$
$$\le \max_{j=1,..,N} e^{Re \lambda_j + 1} = e \cdot \max_j e^{Re \lambda_j}$$
(z dista al massimo 1 da qualche λ_j, $z \in \gamma$).
Poi $\ell(\gamma) \le 2\pi \cdot N$ (N cerchi di raggio 1).
Quindi per concludere basta dimostrare che
$$\|(zI-A)^{-1}\| \le C_N (1+\|A\|)^{N-1}.$$

Se M è una matrice $N\times N$ invertibile, l'inversa si scrive $M^{-1} = \frac{M^{co}}{\det M}$ dove M^{co} è la matrice dei COFATTORI, i cui elementi sono somme di prodotti di $N-1$ elementi di M, quindi
$$\|M^{co}\| \le C_N [M]^{N-1}$$
Invece $\det M$ è il prodotto degli autovalori di M. Se prendiamo
$$M = zI - A \quad \text{otteniamo}$$

$$\| (zI - A)^{-1} \| \leq C_N \frac{[zI - A]^{N-1}}{|z-\lambda_1| \cdots |z-\lambda_N|}$$

Dato che $z \in \gamma = +\partial\Omega$, ne segue $|z-\lambda_j| \geq 1 \ \forall j$.
Inoltre z dista esattamente 1 da qualche λ_j,
quindi

$$|z| \leq 1 + |\lambda_j| \leq 1 + \|A\|$$

il che implica

$$[zI - A] \leq N^2 (|z| + \|A\|) \leq 2N^2 (1 + \|A\|)$$

In conclusione

$$\| (zI - A)^{-1} \| \leq C_N (1 + \|A\|)^{N-1} \quad].$$

Abbiamo tutti gli strumenti per dimostrare il teorema seguente. Consideriamo il problema

$$\boxed{(P_1) \begin{cases} u_t = a(D) u \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases}}$$

dove $\underline{a(D) u = \mathcal{F}^{-1} (a(\xi) \mathcal{F} u)}$, $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}^{N \times N}$ è una funzione su $\mathbb{R}^n$ a valori matriciali.

<u>TEOR</u> Sia $a(\xi) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}^{N \times N}$ tale che

I) $\| a(\xi) \| \leq C_0 \langle \xi \rangle$

II) gli autovalori di $a(\xi)$ hanno PARTE REALE LIMITATA al variare di $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Allora per ogni $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)$ il problema (P_1) ha un'unica soluzione $u \in CH^{s-N+1}$. Inoltre $u \in C^k H^{s-N+1-k}$ $\forall k = 0, 1, 2, \ldots$

[DIM Il sistema di eq. ordinarie

(1) $v' = a(\xi) v \qquad v(0,\xi) = v_0(\xi) = \hat{U}_0(\xi)$

ha soluzione $v(t,\xi) = e^{a(\xi)t}\hat{U}_0(\xi)$.

Dalle stime per e^A otteniamo

$$|v(t,\xi)| \leq C_N (1 + \|a(\xi)t\|)^{N-1} \max_j e^{Re \lambda_j t}$$

dove $\lambda_j = \lambda_j(\xi)$ sono gli autovalori di $a(\xi)$.

Per ipotesi,

$$|Re \lambda_j| \leq C_1 \qquad \forall j$$

quindi $\max_j e^{Re \lambda_j t} \leq e^{C_1|t|}$.

Inoltre sempre per HP, $\|a(\xi)t\| \leq C_0 \langle\xi\rangle |t|$,

quindi

$$|v(t,\xi)| \leq C_N C_0^{N-1}(1+|t|)^{N-1} e^{C_1|t|} \langle\xi\rangle^{N-1} |\hat{U}_0|.$$

Dato che $\hat{U}_0 \in L^2_s$ vediamo che

$$v(t,\xi) \in C L^2_{s-N+1}$$

e dato che

$$v' = a(\xi) v, \quad v'' = a(\xi)^2 v, \text{ etc}$$

vediamo che

$$v \in C^k L^2_{s-N+1-k} \quad \forall k$$

Applicando $\mathcal{F}^{-1}$ otteniamo la tesi.

L'UNICITÀ segue dal fatto che se $U \in CH^{s-N+1}$ è soluzione, allora $\hat{U}(t,\xi)$ deve soddisfare il problema (1) che ha soluzione unica].

HYP 8

OSS Nel problema di partenza

$$a(D) = \sum_{j=1}^{n} A_j \, \partial_j$$

$$a(\xi) = \sum_{j=1}^{n} A_j \cdot \xi_j \cdot i$$

quindi l'HP I) è verificata (anzi $\|a(\xi)\| \leq C|\xi|$) mentre l'HP II) diventa:

$\sum_{j=1}^{n} A_j \xi_j$ ha autovalori con PARTE IMMAGINARIA LIMITATA per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Notiamo però che, essendo $\sum A_j \xi_j$ omogenea in ξ $(a(\lambda \xi) = \lambda a(\xi))$, la parte immaginaria degli autovalori è limitata SE E SOLO se è identicamente nulla.

In conclusione, per il sistema

$$(P) \begin{cases} u_t = \sum_{j=1}^{n} A_j \, \partial_j u \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases}$$

il teorema si applica non appena vale l'HP

$$\boxed{\forall \xi \text{ la matrice } \sum_{j=1}^{n} A_j \xi_j \text{ ha AUTOVALORI REALI}}$$

e cioè proprio quando (P) è un SISTEMA IPERBOLICO.

TEOREMA di RICOPRIMENTO di BESICOVITCH

OSS Richiamiamo il LEMMA di ZORN, un risultato basilare di teoria degli insiemi che equivale all'assioma della scelta.

① Un INSIEME PARZIALMENTE ORDINATO è un insieme $X \neq \emptyset$ su cui è data una relazione di ordine parziale $\leq$ [RIFLESSIVA ($x \leq x$ $\forall x$), ANTISIMMETRICA ($x \leq y$ e $y \leq x \Rightarrow x = y$) e TRANSITIVA ($x \leq y$ e $y \leq z \Rightarrow x \leq z$)]. Si dice anche POSET

② Se $(X, \leq)$ è un POSET, e $C \subseteq X$, un MAGGIORANTE di C è un elemento $m \in X$ tale che

$c \leq m$ per tutti i $c \in C$; un ELEMENTO MASSIMALE di C è un maggiorante di C che appartiene a C.

③ Una CATENA $C \subseteq X$ è un sottoinsieme TOTALMENTE ORDINATO (cioè tale che se $x, y \in C$ si ha $x \leq y$ oppure $y \leq x$: tutti gli elementi sono confrontabili).

LEMMA di ZORN Sia $X \neq \emptyset$ un POSET. Se ogni catena in X ammette un maggiorante, allora X possiede un elemento massimale.

Il lemma di Zorn ci serve per dimostrare un teorema di ricoprimento piuttosto fine dovuto a Besicovitch. Usiamo la seguente notazione: data una palla $B = B_r(x_0)$, con $5B$ indichiamo la palla $B_{5r}(x_0)$ (stesso centro e raggio dilatato di 5 volte).

MA 2

TEOR [BESICOVITCH]. Sia $\mathcal{G}$ una famiglia di sfere chiuse di raggi $\leq R$. Allora è possibile estrarre una sottofamiglia $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ di sfere DISGIUNTE tali che $\bigcup_{B\in\mathcal{G}} B \subseteq \bigcup_{B\in\mathcal{F}} 5B$.

[DIM Per ogni $j \geq 1$ chiamiamo $\mathcal{G}_j$ la famiglia di tutte le palle di $\mathcal{G}$ il cui raggio r è compreso fra $2^{-j}R < r \leq 2^{-j+1}R$.

1. La classe X fatta di tutte le sottofamiglie $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{G}_1$ di sfere DISGIUNTE, è parzialmente ordinata per inclusione. Inoltre ogni catena in X ha un maggiorante [dato dalla classe di tutte le palle della catena]. Per il LEMMA di ZORN esiste una sottofamiglia MASSIMALE $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{G}_1$ di sfere disgiunte.
2. La classe X di tutte le sottofamiglie $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{G}_2$ di sfere disgiunte che NON TOCCANO NESSUNA SFERA $B \in \mathcal{F}_1$, possiede (ragionando come sopra) una $\mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{G}_2$ massimale (fatta di sfere disgiunte che non toccano le sfere di $\mathcal{F}_1$).
3. Ripetiamo per ogni j: otteniamo $\mathcal{F}_j \subseteq \mathcal{G}_j$ massimale, di sfere disgiunte che non toccano le sfere di $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_{j-1}$.
4. Poniamo $\mathcal{F} = \bigcup_{j\geq 1} \mathcal{F}_j$. Allora, le sfere di $\mathcal{F}$ sono disgiunte; inoltre se $B \in \mathcal{G} \Rightarrow B \in \mathcal{G}_j$ per un certo $j \Rightarrow B$ deve per forza toccare qualche sfera B_1 di $\mathcal{F}_1 \cup \dots \cup \mathcal{F}_j$ (altrimenti $\mathcal{F}_j$ non sarebbe massimale perché potremmo aggiungere B) $\Rightarrow$ $\Rightarrow B \subseteq 5B_1$ [raggio $B_1 > 2^{-j}R$, raggio $B \leq 2^{1-j}R = 2(2^{-j}R)$]]

FUNZIONE MASSIMALE

Richiamiamo alcuni modi di scrivere gli integrali utilizzando le misure degli insiemi di livello (m = misura di LEBESGUE)

$$m\{|f|>t\} \equiv m\{x\in\mathbb{R}^n : |f(x)|>t\}.$$

(1) $\boxed{\int |f|\,dx = \int_0^\infty m\{|f|>t\}\,dt}$ $\forall f\in L^1(\mathbb{R}^n)$.

[Se $E = \{(t,x)\in\mathbb{R}^{n+1} : |f(x)|>t\}$, per il teor. di FUBINI $\int |f(x)|\,dx = \int\left(\int_0^{|f(x)|} dt\right)dx =$
$= \int\int \mathbb{1}_E(t,x)\,dt\,dx = \int\left(\int \mathbb{1}_E\,dx\right)dt$]

(2) $\boxed{\int |f|^p dx = \int_0^\infty m\{|f|>t\}\cdot p t^{p-1}\,dt}$ $\forall f\in L^p$, $1\le p<\infty$

[applicare (1) a $g=|f|^p$ e cambiare variabile $t=s^p$]

(3) $\boxed{\int |f|^p dx = p\cdot(p-1)\int_0^\infty t^{p-2}\left(\int_{|f|>t} |f|\,dx\right)dt}$ $\forall f\in L^p$, $1\le p<\infty$

[Sia $\varphi = \sum_{j=1}^N c_j \mathbb{1}_{E_j}$ con $m(E_j)<\infty$. La funzione $t\mapsto m\{|\varphi|>t\}$ è costante a tratti, quindi $t\mapsto \int_t^\infty m\{|\varphi|>s\}\,ds$ è continua e C^1 a tratti, quindi

$$\begin{aligned}\int |\varphi|^p dx &= \int_0^\infty p\, t^{p-1} m\{|\varphi|>t\}\,dt \quad (\text{per (2)})\\ &= -\int_0^\infty p t^{p-1}\left(\int_t^\infty m\{|\varphi|>s\}\,ds\right)' dt\\ &= \int_0^\infty p(p-1)t^{p-2}\int_t^\infty m\{|\varphi|>s\}\,ds\,dt \quad (\text{per parti})\\ &= \int_0^\infty p(p-1)t^{p-2}\left(\int_{|\varphi|>t}|\varphi|\,dx\right)dt \quad (\text{per (1)}).\end{aligned}$$

Se ora $f\in L^p$ è qualunque, esiste una successione di funzioni della forma $\sum_{j=1}^N c_j \mathbb{1}_{E_j} = \varphi_K$ tali che $0\le\varphi_K\uparrow|f|$ q.o. La formula è vera per ogni φ_K, e passando al limite per $K\to\infty$ con il teor. di Beppo Levi si ha la tesi].

DEF Sia $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. La FUNZIONE MASSIMALE di Hardy-Littlewood è

$$Mf(x) := \sup_{r>0} \fint_{B_r(x)} |f| = \sup_{r>0} \frac{n}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x)} |f(y)|\,dy .$$

PROPRIETÀ elementari:

① $|f| \leq |g| \Rightarrow Mf \leq Mg$

② $\|Mf\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^\infty}$ $\left[\fint_{B_r} |f| \leq \sup_{B_r} |f| \right]$

③ Se $f =$ costante $= c \Rightarrow Mf = c$

④ $M(\alpha f + g) \leq |\alpha| \cdot Mf + Mg$ $(\alpha \in \mathbb{C})$.

LEMMA Se $f \in L^1$ e $t > 0$ allora $m\{Mf > t\} < \frac{5^n}{t} \|f\|_{L^1}$

[DIM Sia $A_t = \{x : Mf(x) > t\}$. Allora
$x \in A_t \Rightarrow Mf(x) > t \Rightarrow \fint_{B_r(x)} |f| > t$ per qualche palla $B_r(x)$. Sia $\mathcal{G}$ la famiglia di tutte le palle B tali che $\fint_B |f| > t$. Estraiamo $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ come in BESICOVITCH, e sia $\mathcal{F} = \{B_j\}_{j \geq 1}$. Allora le sfere dilatate $5B_j$ ricoprono tutto $\{Mf > t\}$. (Perché le sfere di $\mathcal{G}$ lo ricoprono). Conclusione:

$$m\{Mf > t\} \leq 5^n \sum_{j \geq 1} |B_j| < \frac{5^n}{t} \sum \int_{B_j} |f| \leq$$

$$\leq \frac{5^n}{t} \int |f| \quad]$$

OSS Dal lemma segue che

$$\sup_{t>0} \left(t \cdot m\{Mf > t\} \right) \leq 5^n \|f\|_{L^1}.$$

La quantità a primo membro si indica anche con

$$\|g\|_{L^1_w} := \sup_{t>0} t \cdot m\{|g| > t\}.$$

HA 5

TEOR $\forall\, 1<p\leq\infty$ si ha $\|Mf\|_{L^p}\leq C_p\|f\|_{L^p}$.
Inoltre $\|Mf\|_{L^1_w}\leq 5^n\|f\|_{L^1}$.

[DIM La seconda disuguaglianza è il LEMMA.
Inoltre il caso $p=\infty$ è già stato visto e $C_\infty=1$.
Sia infine $1<p<\infty$. Fissato $t>0$ poniamo

$$f_t(x):=\begin{cases} f(x) & \text{se } |f(x)|>t/2 \\ 0 & \text{se } |f(x)|\leq t/2 \end{cases}.$$

Chiaramente

$$|f|\leq|f_t|+t/2 \Rightarrow Mf\leq Mf_t+t/2$$

quindi

$$\{Mf>t\}\subseteq\{Mf_t>t/2\}$$

$$\Rightarrow m\{Mf>t\}\leq m\{Mf_t>t/2\}\leq$$
$$\leq 2\cdot\frac{5^n}{t}\|f_t\|_{L^1}=\frac{2\cdot 5^n}{t}\int_{|f|>t/2}|f|.$$

Ora possiamo scrivere

$$\|Mf\|_{L^p}^p=\int_0^\infty p\cdot t^{p-1}m\{Mf>t\}\,dt$$
$$\leq 2\cdot 5^n p\int_0^\infty t^{p-2}\Big(\int_{|f|>t/2}|f|\,dx\Big)dt$$
$$=2^p 5^n\cdot p\int_0^\infty s^{p-2}\Big(\int_{|f|>s}|f|\,dx\Big)ds$$
$$=\frac{2^p5^n}{p-1}\|f\|_{L^p}^p \;]$$

OSS Quindi $C_p\leq\dfrac{2\cdot 5^{n/p}}{(p-1)^{1/p}}$ se $1<p<\infty$, $C_\infty=1$.

DISUGUAGLIANZA di HARDY-LITTLEWOOD-SOBOLEV

La DISUG. di YOUNG per il prodotto di convoluzione

$$f*g(x) := \int f(x-y)g(y)\,dy \equiv \int f(y)g(x-y)\,dy$$

afferma che

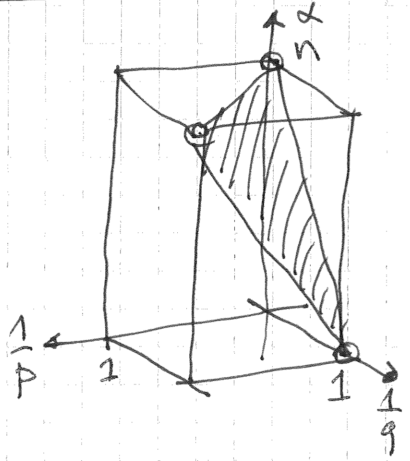
$$\|f*g\|_{L^r} \le \|f\|_{L^p}\cdot\|g\|_{L^q} \qquad \forall\ 1+\frac{1}{r} = \frac{1}{p}+\frac{1}{q}.$$

Il caso $g(x)=\frac{1}{|x|^\alpha}$ non rientra per NESSUN α, poiché $|x|^{-\alpha}$ non appartiene a nessuno spazio L^q.

In realtà si può dire che $|x|^{-\alpha}$ sta "QUASI" in $L^{n/\alpha}$ se $0<\alpha<n$, e vale il seguente

TEOR [H-L-S] Siano $1<q<\infty$, $1<p<\infty$, $0<\alpha<n$. Allora $\left\|\frac{1}{|x|^\alpha}*f\right\|_{L^p} \le C\|f\|_{L^q}$ se $1+\frac{1}{p} = \frac{\alpha}{n}+\frac{1}{q}$.

OSS Possiamo rappresentare in 3D le terne $\left(\frac{1}{p},\frac{1}{q},\alpha\right)$ per cui vale il risultato: si ottiene il triangolo tratteggiato nella figura accanto.



[DIM Sia $I(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(y)|}{|x-y|^\alpha}\,dy$.

Fissiamo $\delta>0$ e spezziamo $I(x) = A+B$,

$$A = \int_{|x-y|<\delta} \qquad\qquad B = \int_{|x-y|\ge\delta}$$

Si ha:

$$A = \sum_{j\ge 0}\int_{\frac{\delta}{2^{j+1}}\le|x-y|<\frac{\delta}{2^j}} '' \le \sum_{j\ge0}\left(\frac{\delta}{2^{j+1}}\right)^{-\alpha}\int_{''}|f(y)|\,dy$$

$$\le \sum_{j\ge0}\left(\frac{\delta}{2^{j+1}}\right)^{-\alpha}\int_{|x-y|<\delta/2^j}|f| \le \sum_{j\ge0}\left(\frac{\delta}{2^{j+1}}\right)^{-\alpha}\left(\frac{\delta}{2^j}\right)^n \fint_{''}|f|\cdot\frac{\omega_n}{n}$$

$$\le \delta^{n-\alpha}\cdot 2^\alpha\cdot\frac{\omega_n}{n}\cdot Mf(x)\cdot\sum_{j\ge0}(2^j)^{\alpha-n}$$

e quindi $\boxed{A \leq C(\alpha, n) \cdot \delta^{n-\alpha} \cdot Mf(x)}$

Invece per stimare B basta HÖLDER:

$$B \leq \left(\int |f|^q\right)^{1/q} \cdot \left(\int_{|x-y|\geq\delta} |x-y|^{-\alpha q'}\right)^{1/q'}$$

$$= \|f\|_{L^q} \cdot c\left(\int_\delta^\infty \rho^{-\alpha q'} \cdot \rho^{n-1} d\rho\right)^{1/q'} \quad \text{(coord. polari)}$$

$$= \|f\|_{L^q} \cdot c(\alpha, q, n) \cdot \delta^{n/q' - \alpha}$$

QUINDI $\forall \delta > 0$

$$I(x) = A + B \leq C\left[\delta^{n-\alpha} Mf(x) + \delta^{n/q' - \alpha} \|f\|_{L^q}\right].$$

Scegliamo ora δ in modo da eguagliare i due termini:

$$\delta^{n-\alpha} Mf(x) = \delta^{n/q' - \alpha} \|f\|_{L^q}$$

cioè $\quad \delta = \left(\frac{\|f\|_{L^q}}{Mf(x)}\right)^{q/n}$

$$\Rightarrow I(x) \leq c \|f\|_{L^q}^{q - \alpha q/n} \cdot Mf(x)^{1 - q + \alpha q/n}$$

$$\equiv c \|f\|_{L^q}^{1 - q/p} Mf(x)^{q/p}$$

da cui

$$I(x)^p \leq c \|f\|_{L^q}^{p-q} \cdot Mf(x)^q.$$

Integrando su $\mathbb{R}^n$

$$\|I\|_{L^p}^p \leq c \|f\|_{L^q}^{p-q} \|Mf\|_{L^q}^q$$

$$\leq c \|f\|_{L^q}^{p-q} \cdot \|f\|_{L^q}^q \quad \text{(proprietà di } Mf\text{)}$$

da cui la tesi. $\square$

STIME di STRICHARTZ per l'EQ. di SCHRÖDINGER

Abbiamo visto che la soluzione del problema

$$\begin{cases} iu_t + \Delta u = F(t,x) \\ u(0,x) = u_0 \end{cases}$$

si rappresenta nella forma

$$u = e^{it\Delta}u_0 - i\int_0^t e^{i(t-\tau)\Delta}F(\tau,\cdot)\,d\tau$$

e che l'operatore $e^{it\Delta}$ verifica le STIME

$$\begin{cases} \|e^{it\Delta}f\|_{L^\infty} \le |4\pi t|^{-n/2}\|f\|_{L^1} \\ \|e^{it\Delta}f\|_{L^2} \equiv \|f\|_{L^2} \end{cases}$$

che si chiamano rispettivamente STIMA DISPERSIVA e CONSERVAZIONE della CARICA.

Da queste è possibile dedurre varie altre stime in norme L^p che rivestono un ruolo fondamentale nello studio delle equazioni di evoluzione nonlineari sviluppato negli ultimi 15 anni.

Un primo passo si può fare usando il

<u>TEOR</u> [di INTERPOLAZIONE di RIESZ-THORIN].
Sia $T: C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \to L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ un operatore lineare che soddisfa $\forall \varphi \in C_c^\infty$ le stime

$$\|T\varphi\|_{L^{q_0}} \le M_0\|\varphi\|_{L^{p_0}}, \qquad \|T\varphi\|_{L^{p_1}} \le M_1\|\varphi\|_{L^{p_1}}$$

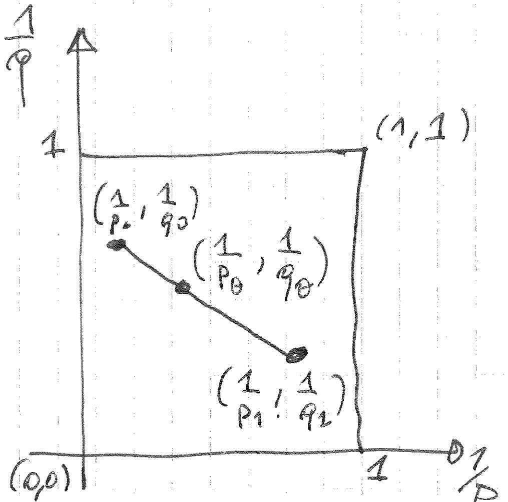
per certi $p_0, p_1, q_0, q_1 \in [1,\infty]$. Allora T soddisfa anche le stime

$$\|T\varphi\|_{L^{q_\theta}} \le M_0^{1-\theta}\cdot M_1^\theta\|\varphi\|_{L^{p_\theta}}$$

per ogni $\theta \in [0,1]$, dove

$$\frac{1}{p_\theta} := \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \qquad \frac{1}{q_\theta} := \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

OSS Non studiamo la dimostrazione del teorema (che non è molto difficile e si basa su tecniche di analisi complesse). Ci limitiamo a ricordare che RIESZ-THORIN è un TEOREMA di CONVESSITÀ, nel senso che segue: se disegniamo nel quadrato unitario tutti i punti $\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right)$ tali che T è un operatore limitato da L^p a L^q, RIESZ-THORIN afferma semplicemente che il DISEGNO che si ottiene è SEMPRE CONVESSO (infatti: se $\left(\frac{1}{p_0}, \frac{1}{q_0}\right)$ e $\left(\frac{1}{p_1}, \frac{1}{q_1}\right)$ appartengono al disegno, il punto $\left(\frac{1}{p_\theta}, \frac{1}{q_\theta}\right)$ al variare di $\theta \in [0,1]$ percorre il segmento che li unisce).



Applicando il teorema all'operatore $e^{it\Delta}$ abbiamo

TEOR [stime DISPERSIVE per $e^{it\Delta}$] l'operatore $e^{it\Delta}$ soddisfa le stime

$$\|e^{it\Delta}f\|_{L^p} \le |4\pi t|^{\frac{n}{p}-\frac{n}{2}} \|f\|_{L^{p'}}, \quad 2 \le p \le \infty.$$

[DIM La stima è vera per $p = p_0 = 2 \Rightarrow p' = q_0 = 2$ e per $p = p_1 = \infty \Rightarrow p' = q_1 = 1$ come sappiamo. Basta ora applicare RIESZ-THORIN e si ha

$$\|e^{it\Delta}f\|_{L^{p_\theta}} \le |4\pi t|^{-\frac{n}{2}\theta} \|f\|_{L^{q_\theta}}.$$

Notiamo che $2 \le p_\theta \le \infty$, inoltre

$$\frac{1}{q_\theta} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1} = \frac{1+\theta}{2}, \qquad \frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} = \frac{1-\theta}{2}$$

da cui $q_\theta = p'_\theta$. Se chiamiamo p_θ semplicemente p e osserviamo che
$\theta = -\frac{2}{p} + 1 \Rightarrow -\frac{n}{2}\theta = \frac{n}{p} - \frac{n}{2}$ abbiamo la tesi.]

$\boxed{\text{STIME di STRICHARTZ}}$

Dal teorema precedente segue subito, $2 \le p \le \infty$,

$$\left\| \int_0^t e^{i(t-\tau)\Delta} F(\tau,\cdot)\, d\tau \right\|_{L^p} \le$$

$$\le \int_0^t \| e^{i(t-\tau)} F(\tau,\cdot)\|_{L^p}\, d\tau$$

$$\le \int |4\pi(t-\tau)|^{n/p - n/2} \cdot \|F(\tau,\cdot)\|_{L^{p'}}\, d\tau$$

$$\le |t|^{n/p - n/2} * \|F(t,\cdot)\|_{L^{p'}}$$

(convoluzione su $\mathbb{R}$). Se ora integriamo anche in t, prendendo la norma L^r, e usando la notazione

$$\|F\|_{L^r_t L^s_x} := \left[\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |F(\tau,x)|^s dx \right)^{\frac{1}{s}\cdot r} d\tau \right]^{1/r}$$

abbiamo

$$\left\| \int_0^t e^{i(t-\tau)\Delta} F(\tau,\cdot)\, d\tau \right\|_{L^r_t L^p_x} \le$$

$$\le \left\| |t|^{n/p - n/2} * \|F(t,\cdot)\|_{L^{p'}_x} \right\|_{L^r_t}$$

Ricordiamo ora la disuguaglianza di HARDY-LITTLEWOOD-SOBOLEV, che nel caso di dimensione 1 (convoluzione su $\mathbb{R}$) afferma

$$\| |t|^{-\alpha} * \varphi(t) \|_{L^r} \le C \|\varphi\|_{L^q}$$

se $0 < \alpha < 1$, $1 + \frac{1}{r} = \alpha + \frac{1}{q}$. Nel nostro caso $\alpha = \frac{n}{2} - \frac{n}{p}$ e quindi

$$\frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r} - \frac{n}{2} + \frac{n}{p}, \text{ e deve essere } 0 < \frac{n}{2} - \frac{n}{p} < 1.$$

Stn 4

allora otteniamo

$$\left\| \int_0^t e^{i(t-\tau)\Delta} F(\tau,\cdot)\,d\tau \right\|_{L^r_t L^p_x} \le C \|F\|_{L^q_t L^{p'}_x}$$

per
$$\begin{cases} \dfrac{1}{q} = 1 + \dfrac{1}{r} - \dfrac{n}{2} + \dfrac{n}{p} \\ 2 < p < \dfrac{2n}{n-2} \qquad \left(\Leftrightarrow 0 < \dfrac{n}{2} - \dfrac{n}{p} < 1 \right). \end{cases}$$

Se in particolare scegliamo $q = r'$ cioè $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{r}$

concludiamo che

$$\boxed{\left\| \int_0^t e^{i(t-\tau)\Delta} F(\tau,\cdot)\,d\tau \right\|_{L^r_t L^p_x} \le C \|F\|_{L^{r'}_t L^{p'}_x}}$$

per
$$\begin{cases} 2 < p < \dfrac{2n}{n-2} \\ \dfrac{2}{r} + \dfrac{n}{p} = \dfrac{n}{2} \end{cases}$$

Tali stime rappresentano il caso più semplice delle STIME di STRICHARTZ e si possono generalizzare notevolmente.