Spazi L^p

In questo capitolo richiamiamo le principali definizioni e i risultati di base della teoria degli spazi L^p, senza dimostrazioni.

1. Spazi L^p

Se μ è una misura (positiva) sull'insieme E e $u : E \to \mathbb{C}$ una funzione misurabile, possiamo definire le quantità

$$\|u\|_{L^p} := \left(\int_E |u(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}, \qquad p \in (0, +\infty),$$
$$\|u\|_{L^\infty} := \inf\{C \colon |u| \leq C \text{ q.o.}\}.$$

Si noti che entrambe le quantità possono essere infinite.

Esercizio 1.1. Per quali valori di $p \in [1, \infty]$ e $a \in \mathbb{R}$ la funzione $u(x) = (1 + |x|)^{-a}$ definita su $\mathbb{R}^n$ verifica $\|u\|_{L^p} < \infty$?

Dalla definizione seguono subito alcune proprietà elementari:

Proposizione 1.2. *Sia μ una misura su E e $u : E \to \mathbb{C}$ una funzione misurabile, $z \in \mathbb{C}$ e $p \in [1, \infty]$. Allora si ha:*

(i) $\|u\|_{L^p} = 0$ *se e solo se* $u = 0$ *q.o.*
(ii) *Se* $u = v$ *q.o. allora* $\|u\|_{L^p} = \|v\|_{L^p}$.
(iii) $|u(x)| \leq \|u\|_{L^\infty}$ *q.o.*
(iv) $\|zu\|_{L^p} = |z|\|u\|_{L^p}$. *(convenzione* $0 \cdot \infty = 0$*).*
(v) (Chebyshev) *Per ogni* $t \geq 0$ *e* $p < \infty$ *vale*

$$t^p \cdot \mu\{x \colon |u(x)| > t\} \leq \|u\|_{L^p}^p.$$

Esercizio 1.3. Dimostrare le proprietà (i)–(vi).

La prima proprietà non banale che incontriamo è la *disuguaglianza di Minkowski*:

Proposizione 1.4 (Minkowski). *Siano $u, v : E \to \mathbb{C}$ due funzioni misurabili e $p \in [1, +\infty]$. Allora si ha*

$$\|u + v\|_{L^p} \leq \|u\|_{L^p} + \|v\|_{L^p}.$$

Vediamo quindi che $\|\cdot\|_{L^p}$ ha tutte le proprietà di una *norma*, con l'eccezione di $\|u\| = 0 \implies u = 0$; infatti se $u = 0$ q.o. si ha $\|u\|_{L^p} = 0$ per tutti i p anche se u non è identicamente nulla. Ricordiamo la definizione:

Definizione 1.5 (Spazi normati). Sia X uno spazio vettoriale. Una *norma* su X è una mappa non negativa $\|\cdot\| : X \to [0, \infty)$ tale che per ogni u, $v \in X$ e ogni scalare z si ha:

(i) $\|u\| = 0$ se e solo se $u = 0$
(ii) $\|zu\| = |z|\|u\|$
(iii) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

Lo spazio X dotato della norma $\|\cdot\|$ si chiama uno *spazio normato*.

Per ottenere una norma vera e priopria basta identificare le funzioni che coincidono q.o. Introduciamo la relazione di equivalenza

$$u \sim v \qquad \Longleftrightarrow \qquad u(x) = v(x) \text{ q.o.}$$

Dalla Proposizione 1.2-(ii) segue che la quantità $\|u\|_{L^p}$ e le operazioni di somma e prodotto tra funzioni sono ben definite sulle classi di equivalenza $[u]$. Arriviamo così alla definizione

DEFINIZIONE 1.6 (Spazi L^p). Lo *spazio di Lebesgue* $L^p(E,\mu)$ è lo spazio di tutte le classi di funzioni misurabili $[u]$ su E tali che $\|u\|_{L^p} < \infty$.

D'ora in poi indicheremo la classe di equivalenza $[u]$ semplicemente con u, dato che questo abuso di notazione non causa ambiguità (quasi mai).

Riuniamo i precedenti risultati in un unico enunciato:

TEOREMA 1.7. *$L^p(E,\mu)$ è uno spazio normato da $\|\cdot\|_{L^p}$ per ogni $p \in [1,+\infty]$.*

2. Convergenza in L^p

La convergenza naturale è quella in norma; una successione $\{u_k\}$ in $L^p(E,\mu)$ *converge in L^p* alla funzione u se

$$\lim_{k\to+\infty} \|u_k - u\|_{L^p} = 0.$$

Come al solito, una successione $\{u_k\}$ è *di Cauchy* se $\lim_{j,k\to+\infty} \|u_j - u_k\|_{L^p} = 0$. Tutte le successioni di Cauchy in L^p sono convergenti, ossia $L^p(E,\mu)$ è uno spazio completo:

TEOREMA 2.1. *$L^p(E,\mu)$ è uno spazio di Banach per ogni $p \in [1,\infty]$.*

Ricordiamo due importanti risultati relativi alla convergenza in L^p;

PROPOSIZIONE 2.2. *Siano $p \in [1,\infty]$ e $u, u_k \in L^p(E,\mu)$ per $k \in \mathbb{N}$. Valgono le proprietà seguenti:*

(i) Se $u_k \to u$ in L^p, esiste una sottosuccessione di u_k convergente a u q.o.

(ii) (CONVERGENZA DOMINATA) Sia $p \in [1,\infty)$. Se $u_k \to u$ q.o. e $|u_k| \le v \in L^p(E,\mu)$ q.o., allora $u_k \to u$ in L^p.

ESERCIZIO 2.3. Dimostrare la proprietà (ii). Mostrare con un controesempio che la proprietà non vale per $p = \infty$.

ESERCIZIO 2.4. Tutte le funzioni semplici stanno in $L^\infty(E,\mu)$. Se invece $p < \infty$, allora una funzione semplice ϕ appartiene a $L^p(E,\mu)$ se e solo se ha supporto finito, ossia

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^{N} c_k \mathbf{1}_{E_k},$$

dove $c_k \in \mathbb{C} \setminus 0$ e gli E_k sono insiemi misurabili di misura finita.

PROPOSIZIONE 2.5. *Sia $p \in [1,\infty]$ e $u \in L^p(E,\mu)$. Allora esiste una successione di funzioni semplici $\phi_k \in L^p$ tale che $|\phi_k| \uparrow |u|$ q.o., $\phi_k \to u$ q.o., e $\phi_k \to u$ in L^p.*

Quindi vediamo che le funzioni semplici di supporto finito sono un sottoinsieme denso di $L^p(E,\mu)$, $p < \infty$, mentre le funzioni semplici sono un sottoinsieme denso di $L^\infty(E,\mu)$.

Una proprietà molto importante di alcuni spazi metrici (e quindi di alcuni spazi normati) è la separabilità: si dice che uno spazio è *separabile* se possiede una successione densa. La separabilità di $L^p(E,\mu)$ dipende dalle proprietà di μ, ma almeno su $\mathbb{R}^n$ con la misura di Lebesgue si può dare un risultato completo; scriveremo di solito $L^p(\Omega)$ invece di $L^p(\Omega,\lambda)$, e L^p o $L^p(\mathbb{R}^n)$ invece di $L^p(\mathbb{R}^n,\lambda)$.

TEOREMA 2.6. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$. $L^p(\Omega)$ è separabile per ogni $p \in [1, \infty)$ mentre $L^\infty(\Omega)$ non è separabile.*

ESERCIZIO 2.7. Dimostrare che $L^\infty(\Omega)$ non è separabile.

OSSERVAZIONE 2.8 (Lo spazio $C_c(\Omega)$). Se Ω è un aperto di $\mathbb{R}^n$, lo spazio delle funzioni $u : \Omega \to \mathbb{C}$ si indica con $C(\Omega)$ o $C^0(\Omega)$. Il *supporto* di $u \in C(\Omega)$ è definito come la chiusura in Ω dell'insieme su cui $u \neq 0$:

$$\operatorname{supp} u = \overline{\{x \in \Omega \colon u(x) \neq 0\}}.$$

(Si noti che $\operatorname{supp} u$ è un chiuso in Ω, ossia l'intersezione di un chiuso di $\mathbb{R}^n$ con Ω, ma non necessariamente un chiuso in $\mathbb{R}^n$). Una funzione $u \in C(\Omega)$ is dice *a supporto compatto* in Ω se $\operatorname{supp} u$ è compatto (si noti che compatto in Ω o compatto in $\mathbb{R}^n$ vogliono dire la stessa cosa; in particolare, $\operatorname{supp} u$ ha una distanza strettamente positiva da $\partial\Omega$). Indicheremo con $C_c(\Omega)$ lo spazio di tutte le $u \in C(\Omega)$ a supporto compatto.

OSSERVAZIONE 2.9 (Densità di $C_c(\Omega)$ in $L^p(\Omega)$). Se Ω è un aperto di $\mathbb{R}^n$ e $p \in [1, \infty)$ allora $C_c(\Omega)$ è un sottospazio denso di $L^p(\Omega)$. Nel seguito del corso dimostreremo una proprietà ancora più forte (densità delle funzioni test), ma la la densità di $C_c(\Omega)$ è una semplice conseguenza della regolarità della misura di Lebesgue, grazie alla quale ogni insieme misurabile si può approssimare con compatti dall'interno e aperti dall'esterno (questo permette di approssimare la funzione indicatrice di qualunque insieme misurabile con funzioni di C_c).

Invece $C_c(\Omega)$ non è denso in $L^\infty(\Omega)$ (provare a dimostrarlo!).

Una proprietà molto utile è la continuità delle traslazioni. Con τ_h indichiamo l'operatore di *traslazione* per funzioni di $\mathbb{R}^n$, che alla funzione $u(x)$ associa la sua traslata

$$\tau_h u(x) = u(x - h).$$

PROPOSIZIONE 2.10. *Se $p \in [1, \infty)$, l'operatore τ_h è continuo su $L^p(\mathbb{R}^n)$, ossia*

$$\textit{per ogni } u \in L^p, \quad \|\tau_h u - u\|_{L^p} \to 0 \quad \textit{per} \quad h \to 0.$$

ESERCIZIO 2.11. Sia $p \in [1, \infty)$ e $h_0 \in \mathbb{R}^n$, $u \in L^p$. Allora $\|\tau_h u - \tau_{h_0} u\|_{L^p} \to 0$ per $h \to h_0$.

ESERCIZIO 2.12. Sia u una funzione limitata su $\mathbb{R}^n$. Si ha $\|\tau_h u - u\|_{L^\infty} \to 0$ per $h \to 0$ se e solo se u è uniformemente continua (ossia, nella classe $[u]$ c'è un rappresentate uniformemente continuo).

OSSERVAZIONE 2.13 (Il Teorema di Vitali). Supponiamo che $\{u_k\}$ sia una successione di funzioni di $L^1(E, \mu)$ limitata e convergente q.o. Questo non basta per garantire la convergenza in norma L^1, come è facile capire. Vengono subito in mente due casi (più le loro combinazioni).

(1) *la massa fugge all'infinito*: ad esempio fissata $u \in C_c(\mathbb{R})$ non identicamente nulla, la successione $u_k(x) = \phi(x - k)$ tende a 0 puntualmente ma non in norma dato che $\|u_k\|_{L^1} = \mathit{cost} \neq 0$.
(2) la massa si concentra in un punto: ad esempio fissata $u \in C_c(\mathbb{R})$ non identicamente nulla, la successione $u_k = k\phi(kx)$ tende a 0 puntualmente ma non in norma dato che $\|u_k\|_{L^1} = \mathit{cost} \neq 0$. Questo fenomeno si chiama *concentrazione*, o *bubbling*.

Un fatto non evidente è che questi sono gli unici problemi che si possono verificare. Introduciamo una terminologia appropriata. Data una famiglia $\mathcal{F} \subset L^p(E, \mu)$ diciamo che $\mathcal{F}$ è

- *tight* se non c'è fuga di massa all'infinito: $\forall \epsilon > 0$ esiste $E_0 \subseteq E$ di misura finita tale che $\int_{E\setminus E_0} |u| d\mu < \epsilon$ per tutte le $u \in \mathcal{F}$;
- *uniformemente integrabile* se non c'è bubbling: $\forall \epsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tale che per tutti gli $A \subseteq E$ con $\mu(A) < \delta$ si ha $\int_A |u| d\mu < \epsilon$ per tutte le $u \in \mathcal{F}$.

Si noti che per una famiglia $\mathcal{F} = \{u\}$ formata da una sola funzione, le due proprietà sono vere; la seconda si chiama anche l'*assoluta continuità dell'integrale* (dimostrarlo per esercizio). Allora si ha:

TEOREMA 2.14 (Teorema di Vitali). *Sia $\{u_k\} \subseteq L^1(E, \mu)$ una successione limitata in norma e convergente q.o.. Allora $\{u_k\}$ converge in L^1 se e solo se è tight e uniformemente integrabile.*

Un caso speciale del Teorema di Vitali è il Teorema di convergenza dominata: se tutte le funzioni u_k sono dominate da una funzione $g \in L^1$, allora la successione è tight e uniformemente integrabile perché la funzione g ha entrambe le proprietà.

Un risultato completamente analogo vale anche in L^p per $p \in [1, +\infty)$ (basta applicare le ipotesi del Teorema alla successione $|u_k|^p$).

3. Alcuni esempi importanti

ESEMPIO 3.1 (Spazi di Lebesgue su $\mathbb{R}^n$). Supporremo quasi sempre che $E = \mathbb{R}^n$ o $E = \Omega$ aperto di $\mathbb{R}^n$, e che $\mu = \lambda$, la misura di Lebesgue n–dimensionale.

La ricca struttura di $\mathbb{R}^n$ fornisce $L^p(\mathbb{R}^n)$ di varie proprietà addizionali rispetto al caso generale. Tuttavia il punto di vista astratto consente di dimostrare in modo unificato risultati generali validi in situazioni molto diverse.

Notiamo un fatto semplice ma spesso importante: se $p \neq q$ allora $L^p(\mathbb{R}^n) \not\subseteq L^q(\mathbb{R}^n)$. Ad esempio la funzione

$$u(x) = (1 + |x|)^{-\frac{n}{p}}$$

sta in tutti gli $L^q(\mathbb{R}^n)$ con $q > p$ ma non in $L^p(\mathbb{R}^n)$; mentre la funzione

$$u(x) = \mathbf{1}_B |x|^{-\frac{n}{p}}, \qquad B = B(0, 1) \text{ palla unitaria}$$

sta in tutti gli $L^q(\mathbb{R}^n)$ con $q < p$ ma non in $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Notare però che se Ω ha misura finita, allora si ha $L^q(\Omega) \subseteq L^p(\Omega)$ per tutti i $q \leq p$; dimostreremo questo risultato più in generale nelle pagine seguenti.

OSSERVAZIONE 3.2 (Omogeneità di L^p). Se $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ possiamo definire per ogni $t > 0$ l'operatore di *riscalatura o dilatazione*

$$S_t u(x) := u(tx). \tag{3.1}$$

Con un semplice cambiamento di variabili vediamo che per ogni $p \in [1, +\infty]$ si ha

$$\|S_t u\|_{L^p} = t^{-\frac{n}{p}} \|u\|_{L^p}. \tag{3.2}$$

ESEMPIO 3.3 (Spazi di Lebesgue discreti). Quando $E = \mathbb{N}$ oppure $\mathbb{Z}$, con la *misura che conta* $\sharp$, allora lo spazio L^p si denota con ℓ^p, ed è chiamato *spazio di Lebesgue discreto.*

Più in dettaglio, ℓ^p è lo spazio di tutte le successioni di numeri complessi $a : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ (o $a : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$) per cui è finita la norma

$$\|a\|_{\ell^p} := (\textstyle\sum_j |a_j|^p)^{1/p} \quad \text{se } p \in [1, \infty), \qquad \|a\|_{\ell^\infty} := \sup_j |a_j|.$$

Notare che per tutti i $p \in [1, \infty]$ si ha

$$\|a\|_{\ell^\infty} \leq \|a\|_{\ell^p}. \tag{3.3}$$

ESEMPIO 3.4 (Lo spazio di Hilbert L^2). Quando $p = 2$, $L^2(E, \mu)$ è uno spazio di Hilbert. Ricordiamo la definizione:

Definizione 3.5 (Spazio di Hilbert). Un *prodotto scalare* sullo spazio vettoriale complesso H è una mappa $(\cdot,\cdot) : H \times H \to \mathbb{C}$ tale che per ogni $u, v, w \in H$ e $z \in \mathbb{C}$

(i) $(u,u) \geq 0$
(ii) $(u,u) = 0$ se e solo se $u = 0$
(iii) $(v,w) = \overline{(w,v)}$
(iv) $(u, zv + w) = \overline{z}(u,v) + (u,w)$

È immediato verificare che $\|v\| := (v,v)^{1/2}$ è una norma e quindi H è uno spazio normato; quando H è completo si chiama *spazio di Hilbert (complesso)*.

In modo analogo si può definire uno spazio di Hilbert reale, partendo da uno spazio vettoriale reale dotato di un prodotto scalare a valori reali che verifica le (i)–(iv) per ogni $z \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3.6. Verificare che

$$(u,v)_{L^2} := \int u(x)\overline{v(x)}d\mu$$

è un prodotto scalare su $L^2(E,\mu)$ (detto il *prodotto* L^2; si usi la disuguaglianza di Hölder (4.2)), e che $(u,u)_{L^2} = \|u\|_{L^2}^2$.

Sappiamo già che $L^2(E,\mu)$ è completo, quindi è uno spazio di Hilbert.

Ogni spazio di Hilbert H ha una base ortonormale, detta solitamente base hilbertiana, ossia un insieme di vettori ortonormali che generano un sottospazio denso in H. Dati un qualunque spazio di Hilbert H e una sua base ortonormale $\{v_e\}_{e\in E}$ (dove E è l'insieme degli indici), si verifica che la mappa

$$w \mapsto \{(w, v_e)\}_{e\in E}$$

è una isometria da H a $L^2(E,\sharp)$. Quindi si può dire che tutti gli spazi di Hilbert sono spazi L^2. Inoltre se H è separabile le sue basi sono numerabili, e quindi gli spazi di Hilbert separabili sono spazi l^2.

4. Disuguaglianze

4.1. Minkowski. Conosciamo già la disuguaglianza di *Minkowski*: se $p \in [1,+\infty]$ e $u, v : E \to \mathbb{C}$ sono misurabili, allora si ha

$$\|u+v\|_{L^p} \leq \|u\|_{L^p} + \|v\|_{L^p}.$$

Si noti che le tre norme nella disuguaglianza possono anche essere infinite; ma se $u, v \in L^p$ il secondo membro è finito e quindi anche $u + v \in L^p$. Vediamo alcune varianti e casi particolari di questa disuguaglianza.

Per induzione otteniamo subito che la disuguaglianza si estende ad una somma finita di funzioni

$$\|u_1 + \cdots + u_N\|_{L^p} \leq \|u_1\|_{L^p} + \cdots + \|u_N\|_{L^p},$$

ma il risultato è valido in effetti per una *successione* di funzioni: se (u_k) è una successione di funzioni in $L^p(E,\mu)$ e il secondo membro della disuguaglianza seguente converge, allora la serie $\sum u_k$ converge in L^p e la somma della serie verifica

$$\Big\|\sum_{k=1}^{\infty} u_k\Big\|_{L^p} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|u_k\|_{L^p}. \tag{4.1}$$

È utile conoscere anche la versione *integrale* della disuguaglianza, di cui diamo una versione sugli spazi euclidei con la misura di Lebesgue: se u è una funzione misurabile su $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ a valori complessi allora si ha

$$\| \textstyle\int |u(x,y)|dy\|_{L^p_x} \leq \int \|u(x,y)\|_{L^p_x} dy$$

dove abbiamo indicato con (x,y) i punti di $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, e la norma L^p_x è calcolata rispetto alle variabili x. La misurabilità delle funzioni coinvolte in tale disuguaglianza è conseguenza dei teoremi di Tonelli e di Fubini; qui come in altri punti delle note faremo implicitamente uso di tali teoremi. (Vedi l'Esercizio 5.8 per una traccia della dimostrazione).

Vediamo infine cosa diventa la disuguaglianza di Minkowski nel caso speciale dello spazio di Lebesgue discreto $L^p(\mathbb{N},\sharp) = \ell^p$: per $p \in [1,\infty)$ otteniamo

$$\Big(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j + b_i|^p\Big)^{1/p} \le \Big(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{j=1}^{\infty} |b_i|^p\Big)^{1/p}$$

per ogni coppia di successioni di numeri complessi $(a_j), (b_j)$.

Esercizio 4.1. Dimostrare la (4.1). (L'esercizio segue dal risultato analogo valido in qualunque spazio di Banach).

4.2. Hölder. La seconda disuguaglianza fondamentale della teoria è la *disuguaglianza di Hölder*. Dato un numero $p \in [1,\infty]$, definiamo l'*indice coniugato di* p come il numero

$$p' = \begin{cases} \frac{p}{p-1} & \text{se } 1 < p < \infty \\ \infty & \text{se } p = 1 \\ 1 & \text{se } p = \infty. \end{cases}$$

Più sinteticamente possiamo scrivere

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

con la convenzione che $\frac{1}{\infty} = 0$. Allora abbiamo:

Teorema 4.2 (disuguaglianza di Hölder). *Siano $u, v : E \to \mathbb{C}$ due funzioni misurabili e $p \in [1,\infty]$. Allora si ha*

$$\|uv\|_{L^1} \le \|u\|_{L^p} \|v\|_{L^{p'}}. \tag{4.2}$$

Notare che le norme che compaiono in (4.2) possono essere infinite (vale sempre la convenzione $0 \cdot \infty = 0$). Ma se $u \in L^p$ and $v \in L^{p'}$ possiamo dedurne che il prodotto uv appartiene a L^1.

Esercizio 4.3. Dimostrare la seguente estensione della (4.2): $\|uv\|_{L^r} \le \|u\|_{L^p}\|v\|_{L^q}$ per tutti i $p,q,r \in [1,\infty]$ tali che $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$.

Per induzione la (4.2) si generalizza al prodotto di N funzioni misurabili $u_1, \dots, u_N$:

$$\|u_1 \cdots u_N\|_{L^1} \le \|u_1\|_{L^{p_1}} \cdots \|u_N\|_{L^{p_N}} \qquad \text{se} \quad \tfrac{1}{p_1} + \cdots + \tfrac{1}{p_N} = 1. \tag{4.3}$$

Una forma equivalente della (4.3) è la seguente: se $\theta_1 + \cdots + \theta_N = 1$, $\theta_k > 0$, allora

$$\textstyle\int |u_1|^{\theta_1} \cdots |u_N|^{\theta_N} dx \le (\int |u_1| dx)^{\theta_1} \cdots (\int |u_N| dx)^{\theta_N}. \tag{4.4}$$

Infine su spazi di Lebesgue discreti otteniamo la disuguaglianza

$$\textstyle\sum_j |a_j b_j| \le (\sum_j |a_j|^p)^{1/p} (\sum_j |b_j|^{p'})^{1/p'}, \qquad p \in (1,\infty).$$

Esercizio 4.4. Dimostrare (4.3) e (4.4).

Una conseguenza immediata ma utilissima della disuguaglianza di Hölder è la seguente: se E ha misura finita allora $L^q(E,\mu) \subseteq L^r(E,\mu)$ per ogni $1 \le r \le q \le +\infty$ e vale la disuguaglianza

$$\|u\|_{L^r} \le \mu(E)^{\frac{1}{r} - \frac{1}{q}} \|u\|_{L^q}, \qquad 1 \le r \le q \le +\infty, \qquad u \in L^q(E,\mu). \tag{4.5}$$

Esercizio 4.5. Dimostrare la (4.5). (Basta scrivere $u = u \cdot 1$ nell'integrale e applicare l'Esercizio 4.3).

Proposizione 4.6 (Disuguaglianza di interpolazione). *Sia* $u \in L^{p_0}(E,\mu) \cap L^{p_1}(E,\mu)$ *per qualche* $1 \le p_0 \le p_1 \le \infty$*. Allora* $u \in L^p(E,\mu)$ *per ogni* $p \in [p_0, p_1]$ *e si ha*

$$\|u\|_{L^p} \le \|u\|_{L^{p_0}}^{1-\theta} \|u\|_{L^{p_1}}^{\theta} \qquad \textit{dove} \qquad \tfrac{1}{p} = \tfrac{1-\theta}{p_0} + \tfrac{\theta}{p_1}.$$

Dimostrazione. Se $p_1 < \infty$, basta applicare la disuguaglianza di Hölder nella forma (4.4) all'integrale

$$\int |u|^p = \int (|u|^{p_0})^{\frac{1-\theta}{p_0}p} (|u|^{p_1})^{\frac{\theta}{p_1}p}.$$

Se invece $p_1 = \infty$ si può usare la disuguaglianza $|u(x)|^p \le |u(x)|^{(1-\theta)p} \|u\|_{L^\infty}^{\theta p}$ notando che $(1-\theta)p = p_0$. □

5. Dualità

Ricordiamo la definizione del duale X' di uno spazio normato X; notare che X' è sempre uno spazio di Banach.

Definizione 5.1 (Spazio duale X'). Lo *spazio duale* di uno spazio normato X reale (o complesso) è lo spazio di Banach X' formato da tutti i funzionali lineari continui $f : X \to \mathbb{R}$ (o $f : X \to \mathbb{C}$). La norma su X' è definita nei modi equivalenti

$$\|f\|_{X'} = \sup_{v \neq 0} \frac{|f(v)|}{\|v\|} = \sup_{\|v\| \le 1} |f(v)| = \sup_{\|v\|=1} |f(v)| \tag{5.1}$$

Osservazione 5.2. Ricordiamo che vale anche la formula simmetrica alla (5.1): per ogni $v \in X$ si ha

$$\|v\|_X = \sup_{\|f\|_{X'} \le 1} |f(v)|. \tag{5.2}$$

Questa formula è una conseguenza immediata del Teorema di Hahn–Banach.

Calcoliamo ora lo spazio duale di L^p. Utilizziamo a questo scopo la mappa $u \mapsto T_u$ che associa a una funzione $u : E \to \mathbb{C}$ il funzionale lineare T_u definito formalmente da

$$T_u(\phi) := \int_E u(x)\phi(x) d\mu.$$

La prima osservazione è elementare: per ogni $p \in [1, \infty]$,

$$\text{se} \quad u \in L^{p'}(E,\mu) \quad \text{allora} \quad T_u \in (L^p)'. \tag{5.3}$$

Questo segue subito dalla disuguaglianza di Hölder: $|T_u(\phi)| \le \|u\|_{L^{p'}} \|\phi\|_{L^p}$, quindi T_u è un funzionale lineare limitato su L^p la cui norma non supera $\|u\|_{L^{p'}}$. Il risultato che segue afferma che in realtà T_u è una isometria suriettiva. (Ricordiamo che una isometria $T : X \to Y$ fra due spazi normati è un'applicazione lineare che conserva la norma, ossia tale che $\|Tv\|_Y = \|v\|_X$ per tutti i $v \in X$).

Teorema 5.3 (F. Riesz). *Sia* $p \in [1, \infty]$*. Allora la mappa* $u \mapsto T_u$ *è una isometria da* $L^{p'}$ *su tutto* $(L^p)'$ *nei seguenti casi:*

- $1 < p < \infty$*, oppure*
- $p = 1$ *e* μ *è* σ*–finita.*

In entrambi i casi abbiamo che $L^{p'}$ *e* $(L^p)'$ *sono spazi isometrici e in particolare*

$$\|u\|_{L^{p'}} = \sup_{\|v\|_{L^p} \le 1} \left| \int uv d\mu \right|.$$

Si noti che il Teorema precedente *non vale* nel caso $p = \infty$; però vale il risultato seguente.

Esercizio 5.4. Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$. Mostrare che per ogni $u \in L^1(\Omega)$ si ha

$$\|u\|_{L^1} = \sup_{\|v\|_{L^\infty(\Omega)} \le 1} \left| \int uv \, dx \right| .$$

[Suggerimento: applicare la (5.2)] Esiste una funzione v che realizza il sup nella formula precedente?

Il problema di caratterizzare lo spazio duale è stato studiato a fondo e risolto (nella prima metà del '900, soprattutto da F. Riesz) per tutti gli spazi funzionali usati in Analisi. Il duale di $L^\infty(E)$ si può caratterizzare come lo spazio delle misure finitamente additive su E, che è troppo grande per essere utilizzato nella pratica. Se ci si restringe a sottospazi di funzioni continue, il duale può essere caratterizzato come un opportuno spazio di misure di Radon, anche se il risultato preciso richiede quache dettaglio tecnico in più. Vediamo tre esempi:

Teorema 5.5 (Riesz–Markov 1). *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$. Sia $L : C_c(\Omega) \to \mathbb{C}$ un funzionale lineare positivo (ossia $L(f) \ge 0$ se $f \ge 0$). Allora esiste una misura positiva di Radon su Ω tale che $L(f) = \int f d\mu$ per ogni $f \in C_c(\Omega)$.*

Teorema 5.6 (Riesz–Markov 2). *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$. Sia $L : C_c(\Omega) \to \mathbb{C}$ un funzionale lineare tale che per ogni compatto $K \subset \Omega$ esiste una costante C_K tale che $|L(f)| \le C_K \|f\|_{L^\infty}$ per tutte le $f \in C_c(K)$. Allora esistono quattro misure di Radon $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$, su Ω, con lo stesso dominio, tali che $L(f) = \sum_{k=1}^4 i^k \int f d\mu_k$ per ogni $f \in C_c(\Omega)$.*

Teorema 5.7 (Riesz–Markov 3). *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e $C_0(\Omega)$ la chiusura di $C_c(\Omega)$ nella norma uniforme. Sia $L : C_0(\Omega) \to \mathbb{C}$ un funzionale lineare limitato. Allora esiste una misura di Radon complessa tale che $L(f) = \int f d\mu$ per ogni $f \in C_0(\Omega)$.*

Esercizio 5.8. Dimostrare la disuguaglianza integrale di Minkowski: se u è una funzione misurabile su $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ a valori complessi allora si ha

$$\| \int |u(x,y)| dy \|_{L^p_x} \le \int \|u(x,y)\|_{L^p_x} dy.$$

[Suggerimento: sia $\phi(x) := \int |u(x,y)| dy$; vogliamo dimostrare che $\|\phi\|_{L^p} \le \int \|u(\cdot,y)\|_{L^p} dy$. Dal Teorema di Riesz e dall'Esercizio 5.4 sappiamo che

$$\|\phi\|_{L^p} = \sup_{\|\psi\|_{L^{p'}} \le 1} \left| \int \phi\psi dx \right| \le \sup_{\|\psi\|_{L^{p'}} \le 1} \iint |u(x,y)||\psi(x)| dx dy$$

dove abbiamo usato il Teorema di Tonelli, e d'altra parte per Hölder abbiamo $\int |u(x,y)||\psi(x)| dx \le \|u(\cdot,y)\|_{L^p_x} \|\psi\|_{L^{p'}}$ e quindi...]