Ulteriori risultati sugli spazi L^p

Questo capitolo è dedicato ad un approfondimento della teoria degli spazi L^p: parleremo di convoluzione e tecniche collegate, e di convergenze deboli (con dimostrazioni).

1. Convoluzione

Definizione 1.1. Diremo che la *convoluzione* di due funzioni misurabili $u, v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ *è definita* se l'integrale

$$u * v(x) = \int u(x-y)v(y)dy \tag{1.1}$$

è finito per quasi ogni x (ossia se per quasi ogni x la funzione $y \mapsto u(x-y)v(y)$ è L^1). In tal caso la funzione $u * v$ si chiama *(prodotto di) convoluzione* di u e v.

Osservazione 1.2. Se $u*v$ è definita è anche una funzione misurabile. Infatti, il prodotto $u(x)v(y)$ è misurabile su $\mathbb{R}^{2n}$, quindi componendo con l'applicazione lineare invertibile $(x, y) \mapsto (x-y, y)$ vediamo che $u(x-y)v(y)$ è una funzione misurabile su $\mathbb{R}^{2n}$. Allora i Teoremi di Tonelli-Fubini implicano che la mappa $x \mapsto \int u(x-y)v(y)dy$ è misurabile.

Si noti che se modifichiamo u e v su insiemi nulli, la funzione $u * v$ (essendo definita dall'integrale (1.1)) non cambia. Di conseguenza, la convoluzione è ben definita per classi di equivalenza di funzioni misurabili.

Proposizione 1.3 (Proprietà elementari). *Siano $u, v, w : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ misurabili. Se i prodotti che compaiono nelle formule sono definiti, valgono le proprietà:*

(i) $u * v = v * u$
(ii) $(u * v) * w = u * (v * w)$
(iii) $\tau_h(u * v) = (\tau_h u) * v = u * (\tau_h v)$ *per ogni* $h \in \mathbb{R}^n$.

Dimostrazione. (i) segue dal cambiamento di variabile lineare $y = x - y'$. Per dimostrare (ii), applichiamo (i) per scrivere $(u * v) * w = (v * u) * w$, quindi il Teorema di Fubini

$$\int \left(\int v(x-z-y)u(y)dy\right)w(z)dz = \int \left(\int v(x-y-z)w(z)dz\right)u(y)dy = (v * w) * u(x),$$

e infine di nuovo (i). La prima identità in (iii) è ovvia quando scritta esplicitamente, e la seconda segue da (i). □

Il prodotto di convoluzione è ben definito per varie classi di funzioni. Il primo caso che esaminiamo è la convoluzione di funzioni L^p:

Proposizione 1.4 (Disuguaglianza di Young). *Siano $p, q, r \in [1, \infty]$ tali che $p^{-1} + q^{-1} = 1 + r^{-1}$. Allora per ogni $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $v \in L^q(\mathbb{R}^n)$ la convoluzione $u * v$ è definita e soddisfa*

$$\|u * v\|_{L^r} \leq \|u\|_{L^p} \|v\|_{L^q}. \tag{1.2}$$

Dimostrazione. Dato che $|u*v| \leq |u|*|v|$, basta dimostrare la disuguaglianza per $u, v \geq 0$ q.o. Distinguiamo tre casi.

(I) $r = 1$. Allora si ha $p = q = 1$. Dal Teorema di Fubini abbiamo

$$\|u * v\|_{L^1} = \int(\int u(x-y)v(y)dy)dx = \int \left(\int u(x-y)dx\right) v(y)dy = \|u\|_{L^1}\|v\|_{L^1}.$$

(II) $r = \infty$, $q = \infty$. Allora si ha $p = 1$. Ne segue subito, per ogni x,

$$u * v(x) = \int u(x-y)v(y)dy \leq \|v\|_{L^\infty}\|u\|_{L^1}$$

e prendendo il sup in x otteniamo (1.2).

(III) $r \in (1, \infty]$, $p, q \in [1, \infty)$. Possiamo scrivere

$$u(x-y)v(y) = [u(x-y)^p v(y)^q]^{\frac{1}{r}} [u(x-y)^p]^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}} [v(y)^q]^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}}$$

(il primo fattore è assente se $r = \infty$). Notare che $r^{-1} + (p^{-1} - r^{-1}) + (q^{-1} - r^{-1}) = 1$ per ipotesi. Dalla disuguaglianza di Hölder otteniamo

$$\int u(x-y)v(y)dy \leq (\int u(x-y)^p v(y)^q dy)^{\frac{1}{r}} (\int u(x-y)^p dy)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}} (\int v(y)^q dy)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}}$$

ossia

$$u * v(x) \leq [u^p * v^q]^{\frac{1}{r}} \|u\|_{L^p}^{1-\frac{p}{r}} \|v\|_{L^q}^{1-\frac{q}{r}}.$$

Se $r = \infty$ basta prendere il sup in x per concludere. Se $r < \infty$, elevando alla r entrambi i membri, integrando in x e usando il caso (I) otteniamo

$$\|u*v\|_{L^r}^r \leq \|u^p * v^q\|_{L^1} \|u\|_{L^p}^{r-p} \|v\|_{L^q}^{r-q} \leq \|u^p\|_{L^1}\|v^q\|_{L^1}\|u\|_{L^p}^{r-p}\|v\|_{L^q}^{r-q} = \|u\|_{L^p}^r \|v\|_{L^q}^r.$$

□

Osservazione 1.5. Nel caso $p = q = r = 1$ la disuguaglianza di Young mostra che lo spazio L^1 è un'*algebra di Banach* per il prodotto di convoluzione:

$$\|u * v\|_{L^1} \leq \|u\|_{L^1}\|v\|_{L^1}.$$

Un altro caso di uso comune è $r = p \in [1, \infty]$, $q = 1$:

$$\|u * v\|_{L^p} \leq \|u\|_{L^1}\|v\|_{L^p}.$$

Se Ω è un aperto di $\mathbb{R}^n$ e $u \in C(\Omega)$, il supporto di u si definisce come la chiusura in Ω dell'insieme dei punti in cui la funzione è diversa da zero. Questa definizione è inadeguata per classi di equivalenza di funzioni perché dipende dal rappresentante scelto (ad esempio, la funzione $\mathbf{1}_\mathbb{Q}$ su $\mathbb{R}$ è nulla q.o. ma il suo supporto, secondo questa definizione, è tutto $\mathbb{R}$). Vediamo come risolvere questo problema.

Definizione 1.6 (Supporto essenziale). Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e $u : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione misurabile. Il *luogo di zeri di* u è l'unione di tutti gli aperti $\omega \subseteq \Omega$ tali che u è nulla q.o. su ω (notare che $u = 0$ q.o. sul suo luogo di zeri in quanto esso si può scrivere come unione di una successione di aperti su cui u si annulla q.o., dato che la topologia euclidea ha una base numerabile). Il *supporto (essenziale)* di u è il complemento in Ω del luogo di zeri di u:

$$\operatorname{supp} u = \Omega \setminus \bigcup_{\substack{\omega \text{ aperto} \\ u=0 \text{ q.o. su } \omega}} \omega.$$

Ricordiamo che se $E, F \subseteq \mathbb{R}^n$ e $h \in \mathbb{R}^n$, si definiscono

$$E \pm F = \{x \pm y : x \in E,\ y \in F\}, \qquad h \pm E = \{h\} \pm E.$$

Esercizio 1.7. Sia u una funzione continua su $\mathbb{R}^n$ con supporto K e sia $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Dimostrare che il supporto della funzione $y \mapsto u(x_0 - y)$ è $x_0 - K$.

Proposizione 1.8. *Se* $u * v$ *è definita, allora* $u * v(x) = 0$ *in ogni punto* $x \notin \operatorname{supp} u + \operatorname{supp} v$. *Di conseguenza*

$$\operatorname{supp}(u * v) \subseteq \overline{\operatorname{supp} u + \operatorname{supp} v}. \tag{1.3}$$

Dimostrazione. Fissato un punto x, la funzione $y \mapsto u(x-y)$ ha supporto $x - \operatorname{supp} u$, quindi

$$u * v(x) = \int_{(x-\operatorname{supp} u)\cap \operatorname{supp} v} u(x-y)v(y)dy.$$

Chamiamo $C = \operatorname{supp} u + \operatorname{supp} v$ e osserviamo che $x \in C$ se e solo se esistono $y \in \operatorname{supp} u$, $z \in \operatorname{supp} v$ tali che $x - y = z$, ossia se e solo se $(x - \operatorname{supp} u) \cap \operatorname{supp} v$ non è vuoto. Detto in altro modo, $x \notin C$ se e solo se $(x - \operatorname{supp} u) \cap \operatorname{supp} v = \emptyset$, ed in questo caso l'integrale si annulla. Questo dimostra la prima affermazione.

Dimostriamo la seconda affermazione: se ω è un aperto contenuto in $\mathbb{R}^n \setminus C$, per quanto appena dimostrato abbiamo $u * v = 0$ q.o. (anzi ovunque) su ω, cioè ω è contenuto nel luogo di zeri di $u * v$. Questo dimostra che la parte interna di $\mathbb{R}^n \setminus C$ è contenuta nel luogo degli zeri di $u * v$. Prendendo i complementari abbiamo la tesi dato che il complementare di $(\mathbb{R}^n \setminus C)^\circ$ è $\overline{C}$. □

Osservazione 1.9. Si noti che se E, F sono insiemi chiusi, può accadere che $E + F$ *non sia* un insieme chiuso. Se invece E, F sono compatti allora $E + F$ è compatto. Provate a dimostrarlo. Che succede se uno dei due insiemi è compatto e l'altro è soltanto chiuso?

Definizione 1.10. Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$. Una funzione misurabile $u : \Omega \to \mathbb{C}$ si dice *localmente integrabile su* Ω se per ogni compatto $K \subset \Omega$ l'integrale $\int_K |u|dx$ è finito. Lo spazio di tali funzioni si indica con $L^1_{loc}(\Omega)$, e scriveremo semplicemente $L^1_{loc} = L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Nel seguito del corso considereremo vari spazi funzionali X per i quali sarà conveniente introdurre versioni locali, indicate con la notazione X_{loc}.

Proposizione 1.11. *Se $u \in C_c(\mathbb{R}^n)$ e $v \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ allora la convoluzione $u * v$ è definita ed è una funzione continua.*

Dimostrazione. Per tutti gli x la funzione $y \mapsto u(x-y)v(y)$ è integrabile e quindi $u * v$ è definita. Dimostriamo ora che è continua ossia che per ogni x si ha

$$\lim_{h\to 0} u * v(x+h) = u * v(x).$$

Abbiamo

$$\begin{aligned}|u * v(x+h) - u * v(x)| &= |\textstyle\int [u(x+h-y) - u(x-y)]v(y)dy| \\ &\le \int |u(x+h-y) - u(x-y)| \cdot |v(y)|dy.\end{aligned}$$

Notiamo ora due fatti: anzitutto, la funzione u essendo in C_c è uniformemente continua, quindi per ogni $\varepsilon > 0$ possiamo trovare $\delta > 0$ tale che

$$|h| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |u(x+h-y) - u(x-y)| < \varepsilon$$

per qualunque $x \in \mathbb{R}^n$. Inoltre, se chiamiamo K il supporto compatto di u, la funzione $y \mapsto u(x+h-y)$ ha supporto compatto $(x+h) - K$, e l'unione di questi supporti $C = \cup_{|h|\le 1}(x+h-K)$ per $|h| \le 1$ è ancora un insieme compatto (per x fissato). Dai due fatti segue che

$$|h| < \delta \le 1 \quad \Longrightarrow \quad |u(x+h-y) - u(x-y)| < \varepsilon \cdot \mathbf{1}_C.$$

Tornando alla prima disuguaglianza, possiamo scrivere

$$|h| < \delta \le 1 \quad \Longrightarrow \quad |u * v(x+h) - u * v(x)| \le \varepsilon \textstyle\int_C |v(y)|dy$$

e quindi otteniamo la tesi. □

Esercizio 1.12. Dimostrare che la convoluzione di una funzione continua con una funzione L^1 a supporto compatto è definita ed è una funzione continua.

2. Regolarità di una convoluzione

La convoluzione di due funzioni regolari eredita la regolarità di entrambe le funzioni. Studiamo in dettaglio questo fenomeno; ricordiamo che

- $C^k_c(\Omega)$ è lo spazio delle funzioni di classe C^k sull'aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ il cui supporto è un compatto contenuto in Ω; si scrive anche $C^k = C^k(\mathbb{R}^n)$;
- $C^\infty_c(\Omega) = \cap_{k\geq 1} C^k_c(\Omega)$ e $C^\infty_c = C^\infty_c(\mathbb{R}^n) = \cap_{k\geq 1} C^k_c(\mathbb{R}^n)$.

Le funzioni di C^∞_c (C^∞ a supporto compatto) si dicono anche *funzioni test.*

Nel seguito, indichiamo con Δ^j_t il rapporto incrementale rispetto alla variabile x_j, cioè

$$\Delta^j_t u(x) = \frac{u(x+te_j) - u(x)}{t}.$$

Esercizio 2.1. Dimostrare che se $u \in C^1_c$ allora $\Delta^j_t u \to \partial_j u$ uniformemente per $t \to 0$, $j = 1, \dots, n$.

Proposizione 2.2. *Se $u \in C^k_c(\mathbb{R}^n)$, $k \geq 1$, e $v \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ allora la convoluzione $u * v$ è definita ed è una funzione di classe C^k. Inoltre vale la formula $\partial^\alpha(u * v) = \partial^\alpha u * v$ per ogni $|\alpha| \leq k$.*

Dimostrazione. Il caso $k > 1$ si ottiene subito dal caso $k = 1$ per induzione su k, quindi ci concentriamo sul caso $k = 1$. Dalla Proposizione 1.11 sappiamo già che $u * v$ è definita e continua. Dobbiamo solo dimostrare che $u * v$ è derivabile e che vale la formula $\partial_j(u*v) = \partial_j u * v$ per $j = 1, \dots, n$, e allora applicando di nuovo la Proposizione 1.11 otterremo che $u * v$ è di classe C^1.

Se chiamiamo K il supporto di u, vediamo che $\partial_j u$ ha supporto contenuto in K e quindi la funzione $y \mapsto \partial_j u(x - y)$ ha supporto contenuto in $x - K$. Invece $\Delta^j_t u$ ha supporto contenuto $K_t := K \cup (K - te_j)$, quindi la funzione $y \mapsto \Delta^j_t u(x - y)$ ha supporto contenuto in $x - K_t$, e l'unione di questi supporti per $|t| \leq 1$ è contenuta nel compatto $C = \cup_{|t|\leq 1}(x - K_t)$ (notare che C contiene $x - K$). Quindi possiamo scrivere, per ogni t con $|t| \leq 1$,

$$|(\Delta^j_t u) * v(x) - (\partial_j u) * v(x)| = |(\Delta^j_t u - \partial_j u) * v(x)| \leq \|\Delta^j_t u - \partial_j u\|_{L^\infty} \|v\|_{L^1(C)}.$$

Dato che la funzione u è C^1 ed ha supporto compatto, si ha $\Delta^j_t u \to \partial_j u$ uniformemente per $t \to 0$, quindi dall'ultima disuguaglianza otteniamo

$$\lim_{t\to 0} (\Delta^j_t u) * v(x) = (\partial_j u) * v(x)$$

ma $\Delta^j_t(u * v) = (\Delta^j_t u) * v$ (segue dalla Proposizione 1.3 (iii)) e quindi abbiamo dimostrato che $u * v$ è derivabile rispetto a x_j e la sua derivata è $\partial_j u * v$. □

Esercizio 2.3. Se $u \in C^k$ e $v \in L^1$ con supporto compatto, allora $u * v$ è di classe C^k e vale la formula $\partial^\alpha(u * v) = \partial^\alpha u * v$ per ogni $|\alpha| \leq k$.

Corollario 2.4. *Siano $u \in C^j$ e $v \in C^k_c$ per qualche $j, k \geq 0$. Allora $u * v \in C^{j+k}$ e per ogni $|\beta| \leq j$, $|\gamma| \leq k$ si ha*

$$\partial^{\beta+\gamma}(u * v) = \partial^\beta u * \partial^\gamma v.$$

Esercizio 2.5. Dimostrare il Corollario 2.4.

3. Regolarizzazioni

Una delle applicazioni più utili del prodotto di convoluzione è per la regolarizzazione di funzioni. L'idea è contenuta nel risultato seguente:

Proposizione 3.1. *Sia $\rho(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ con $\int \rho(x)dx = 1$, e poniamo $\rho_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\rho(\varepsilon^{-1}x)$. Allora per $\varepsilon \to 0$, si ha:*

(i) Se $u \in L^p$ per qualche $\rho \in [1, \infty)$, allora $\rho_\varepsilon * u \to u$ in L^p;
(ii) Se u è limitata e uniformemente continua, allora $\rho_\varepsilon * u \to u$ uniformemente.

Dimostrazione. Possiamo scrivere, grazie al cambiamento di variabile $y \to \varepsilon y$,

$$\rho_\varepsilon * u(x) - u(x) = \int \rho(y)(u(x - \varepsilon y) - u(x))dy = \int \rho(y)(\tau_{\varepsilon y}u(x) - u(x))dy.$$

Prendendo la norma L^p in x e applicando la disuguaglianza integrale di Minkowski, otteniamo

$$\|\rho_\varepsilon * u - u\|_{L^p} \leq \int |\rho(y)| \cdot \|\tau_{\varepsilon y}u - u\|_{L^p} dy.$$

Dalla continuità delle traslazioni su L^p, sappiamo che $\|\tau_{\varepsilon y}u - u\|_{L^p} \to 0$ per $\varepsilon \to 0$, per ogni y fissato; possiamo applicare il Teorema della convergenza dominata, dato che $\|\tau_{\varepsilon y}u - u\|_{L^p} \leq 2\|u\|_{L^p}$, e concludiamo che l'ultimo integrale converge a 0 per $\varepsilon \to 0$.

Se u è uniformemente continua, osserviamo che per ogni y fissato si ha $\tau_{\varepsilon y}u \to u$ uniformemente quando $\varepsilon \to 0$ (questo segue subito dalla definizione di uniforme continuità). Quindi $\|\tau_{\varepsilon y}u - u\|_{L^\infty} \to 0$ per ogni y e ragionando come nel caso precedente otteniamo la tesi. □

La scelta tipica per la funzione $\rho(x)$ è la *funzione test standard* $\rho(x) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, definita come

$$\rho(x) = \begin{cases} c_0^{-1} \exp \frac{1}{|x|^2-1} & \text{se } |x| < 1 \\ 0 & \text{se } |x| \geq 1 \end{cases} \qquad \text{dove } c_0 := \int_{|x|<1} e^{\frac{1}{|x|^2-1}} dx.$$

Allora ρ_ε si chiama *mollificatore di Friedrichs (standard)*, e la convoluzione $\rho_\varepsilon * u$ si indica con u_ε e si chiama la *regolarizzata* di u. Dalle proprietà del prodotto di convoluzione abbiamo

(i) $u_\varepsilon \in C^\infty$
(ii) $\operatorname{supp} u_\varepsilon \subseteq \{x : d(x, \operatorname{supp} u) \leq \varepsilon\}$
(iii) se $u \in L^p$, $p \in [1, \infty]$, allora $u_\varepsilon \in L^p$ and $\|u_\varepsilon\|_{L^p} \leq \|u\|_{L^p}$.

Inoltre, dalla Proposizione precedente otteniamo che per $\varepsilon \to 0$ si ha

(iv) se $u \in L^p$ per qualche $p \in [1, \infty)$ allora $u_\varepsilon \to u$ in L^p
(v) se $u \in C_c$ allora $u_\varepsilon \to u$ uniformemente e in L^p per tutti i $p \in [1, \infty)$.

Ricordando che $\partial^\alpha u_\varepsilon = (\partial^\alpha u)_\varepsilon$, abbiamo più in generale

(vi) se $u \in C_c^k$ allora $\partial^\alpha u_\varepsilon \to \partial^\alpha u$ uniformemente su $\mathbb{R}^n$ per ogni $|\alpha| \leq k$.

Una prima conseguenza di questa costruzione è che per ogni aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ lo spazio $C_c^\infty(\Omega)$ delle funzioni test con supporto in Ω non è vuoto. Ad esempio presa una palla aperta $B(x_0, 2\varepsilon) \subseteq \Omega$, la funzione $\rho_\varepsilon(x - x_0)$ ottenuta traslando e riscalando ρ ha come supporto la palla chiusa $\overline{B(x_0, \varepsilon)}$ che è quindi un compatto contenuto in Ω.

Come prima applicazione importante della tecnica, facciamo vedere che le funzioni test sono dense negli spazi L^p. Prima però proponiamo un esercizio:

Esercizio 3.2. Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e per ogni $\varepsilon > 0$ sia Ω_ε l'insieme

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : |x| < 1/\varepsilon, \ d(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$$

e $K_\varepsilon = \overline{\Omega_\varepsilon}$ la sua chiusura. Mostrare che i K_ε sono una famiglia di compatti che invade Ω, ossia K_ε è una famiglia crescente di compatti la cui unione è Ω; in simboli $K_\varepsilon \uparrow \Omega$ per $\varepsilon \downarrow 0$.

Proposizione 3.3 (Densità delle funzioni test in L^p). *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$. Allora $C_c^\infty(\Omega)$ è un sottospazio denso di $L^p(\Omega)$ per ogni $p \in [1, \infty)$.*

Dimostrazione. Dati $u \in L^p(\Omega)$ e $\delta > 0$, dobbiamo costruire una funzione test $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ tale che $\|u - \phi\| < \delta$. Sia K_j una successione di compatti che invadono Ω, e chiamiamo $v_j = \mathbf{1}_{K_j} u$ la restrizione di u a K_j. Allora

$$\|v_j - u\|_{L^p}^p = \int |u|^p \mathbf{1}_{\Omega \setminus K_j} dx.$$

Applicando il Teorema della convergenza dominata si ha $v_j \to u$ in $L^p(\Omega)$.

Ora fissiamo j tale che $\|v_j - u\|_{L^p} < \delta/2$ e regolarizziamo v_j; dato che $(v_j)_\varepsilon \to v_j$ in L^p per $\varepsilon \to 0$, possiamo prendere ε così piccolo che

$$\|v_j - (v_j)_\varepsilon\|_{L^p} < \delta/2 \quad \text{e} \quad \varepsilon < d(K_j, \partial\Omega)$$

(notare che $d(K_j, \partial\Omega) > 0$). Per la proprietà (ii) sul supporto delle regolarizzazioni si ha che $\phi = (v_j)_\varepsilon$ appartiene a $C_c^\infty(\Omega)$, e inoltre soddisfa come richiesto

$$\|u - \phi\|_{L^p} \le \|u - v_j\|_{L^p} + \|v_j - \phi\|_{L^p} < \tfrac{\delta}{2} + \tfrac{\delta}{2} = \delta. \qquad \square$$

Una seconda applicazione molto importante è il seguente risultato, conosciuto anche sotto altri nomi (ad esempio Lemma Fondamentale del Calcolo delle Variazioni):

Lemma 3.4 (Du Bois–Reymond). *Sia $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tale che*

$$\int_\Omega u\phi dx = 0 \quad \textit{per ogni} \quad \phi \in C_c^\infty(\Omega)$$

Allora $u = 0$ q.o.

Dimostrazione. Sia $B = B(x_0, r)$ una palla aperta tale che $\overline{B} \subset \Omega$; definiamo una funzione $v \in L^1(\mathbb{R}^n)$ come $v(x) = u(x)$ se $x \in B$ e $v(x) = 0$ altrove. La regolarizzata v_ε converge a v in L^1, quindi passando a una sottosuccessione v_{ε_j} abbiamo anche $v_{\varepsilon_j} \to v$ q.o. e in particolare $v_{\varepsilon_j} \to u$ q.o. in B dove $u = v$. D'altra parte, se $\varepsilon < r$ e $x \in B(x_0, r - \varepsilon)$ abbiamo

$$v_\varepsilon(x) = \int v(y)\rho_\varepsilon(x-y)dy = \int_{B(x,\varepsilon)} v(y)\rho_\varepsilon(x-y)dy = \int u(y)\rho_\varepsilon(x-y)dy = 0$$

perché il supporto di $y \mapsto \rho_\varepsilon(x-y)$ è $\overline{B(x,\varepsilon)}$ che è contenuto in $B(x_0, r)$; l'ultimo integrale si annulla per l'ipotesi su u. Vediamo così che $v_{\varepsilon_j} \to 0$ in tutti i punti di B. Abbiamo dimostrato che $u = 0$ q.o. in B arbitraria, e quindi in tutto Ω. $\square$

4. Richiami di Analisi Funzionale

Ricordiamo alcune semplici nozioni di Analisi Funzionale che ci saranno utili nel seguito. Diamo per note le nozioni di spazio metrico X con distanza d e spazio normato X con norma $\|\cdot\| = \|\cdot\|_X$; uno spazio normato è anche uno spazio metrico con la distanza $d(v, w) := \|v - w\|$, e se uno spazio normato è completo come spazio metrico si chiama *spazio di Banach*. Ricordiamo che un sottoinsieme E di uno spazio metrico è *limitato* se esiste una palla che lo contiene; quindi se lo spazio è normato, E è limitato se e solo se $\sup_{v \in E} \|v\| < \infty$.

Le applicazioni lineari fra spazi normati sono il principale oggetto di studio dell'Analisi Funzionale; esse vengono chiamate di solito "operatori lineari" o anche semplicemente "operatori". Si scrive di solito

$$Tv \text{ al posto di } T(v)$$

come nel caso delle matrici. La continuità di un operatore lineare $T : X \to Y$ tra due spazi normati si può caratterizzare in vari modi equivalenti. A questo scopo introduciamo la *norma operatore* $\|T\|$ di T, definita come segue:

$$\|T\| := \sup_{v \neq 0} \frac{\|Tv\|_Y}{\|v\|_X} = \sup_{\|v\|_X = 1} \|Tv\|_Y = \inf\{C : \|Tv\|_Y \le C\|v\|_X \text{ per ogni } v \in X\}$$

(se è necessario evitare ambiguità si usa anche la notazione $\|T\|_{X\to Y} = \|T\|$). Notare che

$$\|Tv\|_Y \leq \|T\|\|v\|_X \quad \text{per ogni} \quad v \in X$$

ossia l'inf nella definizione di C è in effetti un minimo.

Esercizio 4.1. Verificare che le tre espressioni nella definizione di $\|T\|$ coincidono.

Possiamo ora caratterizzare gli operatori continui:

Proposizione 4.2. *Sia $T : X \to Y$ un operatore lineare fra due spazi normati. Allora le seguenti proprietà sono equivalenti:*

(i) T è continuo in 0
(ii) T è continuo in ogni punto
(iii) T porta insiemi limitati in insiemi limitati
(iv) T porta la palla unitaria di X in un insieme limitato
(v) $\|T\| < \infty$, ossia $\exists M \geq 0$ tale che $\|Tv\|_Y \leq M\|v\|_X$ per ogni $v \in X$.

Dimostrazione. (i) $\Longrightarrow$ (ii): per ogni $v \in X$ e ogni successione $v_k \to v$ si ha

$$Tv_k = T(v_k - v) + Tv \to 0 + Tv = Tv$$

perché T è continuo in 0, e quindi T è continuo anche in v.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): se esistesse un insieme limitato E tale che $T(E)$ non è limitato, per ogni k potremmo trovare un punto $v_k \in E$ tale che $m_k := \|Tv_k\|_Y \geq k$. Ma allora la successione $w_k = v_k/m_k$ tende a 0 e invece Tw_k non tende a 0 dato che $\|Tw_k\|_Y = \|Tv_k\|_Y/m_k = 1$ per ogni k. Quindi T non sarebbe continuo in 0.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv): ovvio.

(iv) $\Longrightarrow$ (v): $T(B(0,2)) = T(2 \cdot B(0,1)) = 2 \cdot T(B(0,1))$ è limitato, per la linearità di T. Posto $E = \{v \in X : \|v\|_X = 1\}$, anche $T(E)$ è limitato, dato che $E \subset B(0,2)$. Ma questo vuol dire esattamente $\|T\| = \sup_{\|v\|_X=1} \|Tv\|_Y < \infty$.

(v) $\Longrightarrow$ (i): per ogni $v_k \to 0$ si ha $\|Tv_k\|_X \leq \|T\|\|v_k\|_X \to 0$, da cui (i). $\square$

Esercizio 4.3. Dimostrare che se un operatore T fra spazi normati porta una palla in un insieme limitato allora è continuo.

Gli operatori che soddisfano la proprietà (iii), ossia tutti e soli gli operatori continui, si dicono *operatori limitati*:

Definizione 4.4. Un operatore lineare $T : X \to Y$ tra due spazi normati si dice *limitato* se per ogni insieme limitato $E \subseteq X$ l'immagine $T(E)$ è un insieme limitato in Y. Lo spazio degli operatori limitati da X in Y, normato dalla norma operatore, si indica con $\mathscr{B}(X,Y)$.

Esercizio 4.5. Se X è uno spazio normato (anche non completo) e Y è uno spazio di Banach, allora $\mathscr{B}(X,Y)$ è uno spazio di Banach.

Una proprietà fondamentale degli operatori limitati è la seguente:

Teorema 4.6 (Principio di Limitatezza Uniforme). *Sia $\mathcal{T}$ una famiglia di operatori limitati da uno spazio di Banach X in uno spazio normato Y. Se per ogni $v \in X$ vale $\sup_{T\in\mathcal{T}} \|Tv\| < \infty$, allora $\sup_{T\in\mathcal{T}} \|T\| < \infty$.*

Dim. (A. Sokal). Un'osservazione preliminare: se $S : X \to Y$ è un operatore limitato, $v \in X$ e $r > 0$, allora vale la disuguaglianza

$$\sup_{w\in B(v,r)} \|Sw\| \geq \|S\|r. \tag{4.1}$$

Infatti, per qualunque ξ si ha $\|S\xi\| = \frac{1}{2}\|S(v+\xi) - S(v-\xi)\| \leq \frac{1}{2}[\|S(v+\xi)\| + \|S(v-\xi)\|]$ e se supponiamo $\|\xi\| < r$ abbiamo $\|S\xi\| \leq \sup_{w\in B(v,r)} \|Sw\|$; infine, prendendo il sup in $\xi \in B(0,r)$ otteniamo (4.1).

Dimostriamo il Teorema. A tale scopo, è sufficiente supporre che $\sup_{T\in\mathcal{T}}\|T\| = +\infty$ e costruire un punto v tale che il valore di $\|Tv\|$ è illimitato al variare di $T \in \mathcal{T}$. Esiste sicuramente una successione $(T_k) \subseteq \mathcal{T}$ tale che $\|T_k\| \geq 4^k$. Definiamo per induzione una successione $(v_k) \subset X$ nel modo seguente: $v_0 = 0$; dato v_{k-1}, applichiamo (4.1) con $S = T_k$, $v = v_{k-1}$ e $r = 3^{-k}$ e scegliamo un punto v_k tale che $\|v_k - v_{k-1}\| < 3^{-k}$ e $\|T_k v_k\| \geq \frac{2}{3}\|T_k\|3^{-k}$. Quindi per ogni $j > k$ abbiamo

$$\|v_j - v_k\| \leq \|v_j - v_{j-1}\| + \cdots + \|v_{k+1} - v_k\| \leq 3^{-j} + 3^{1-j} + \cdots + 3^{-k-1} = \tfrac{1}{2}(3^{-k} - 3^{-j}).$$

Questo implica che (v_k) è di Cauchy e tende ad un limite v; se poi mandiamo $j \to +\infty$ otteniamo $\|v - v_k\| \leq \frac{1}{2}3^{-k}$, da cui $\|T_k(v - v_k)\| \leq \|T_k\|\frac{1}{2}3^{-k}$. Concludendo,

$$\|T_k v\| \geq \|T_k v_k\| - \|T_k(v - v_k)\| \geq \tfrac{2}{3}\|T_k\|3^{-k} - \|T_k\|\tfrac{1}{2}3^{-k} \geq \tfrac{1}{6}\|T_k\|3^{-k} \geq \tfrac{1}{6}(\tfrac{4}{3})^k \to +\infty.$$

□

Esercizio 4.7 (Banach–Steinhaus). Sia $T_k : X \to Y$ una successione di operatori limitati da uno spazio di Banach X a uno spazio normato Y. Supponiamo che per ogni $x \in X$ la successione $(T_k x)$ converga in Y, e indichiamo con $T(x)$ il suo limite. Allora $T(x) : X \to Y$ è un operatore lineare limitato.

Ritorniamo sulla nozione di spazio duale, brevemente accennata nel Capitolo precedente. Gli operatori lineari da uno spazio normato a valori scalari $f : X \to \mathbb{C}$ (o $f : X \to \mathbb{R}$ se lo spazio normato è reale) si chiamano di solito *funzionali lineari* su X. Si noti che, se X ha dimensione infinita, i funzionali lineari su X non sono necessariamente continui. I funzionali continui formano un sottospazio dello spazio di tutti i funzionali lineari, che si chiama lo spazio duale X', normato per la norma operatore.

Definizione 4.8 (Spazio duale X'). Lo *spazio duale* di uno spazio normato X reale (o complesso) è lo spazio X' di tutti i funzionali lineari continui $f : X \to \mathbb{R}$ (o $f : X \to \mathbb{C}$), munito della norma operatore

$$\|f\|_{X'} = \sup_{v\neq 0} \frac{|f(v)|}{\|v\|} = \sup_{\|v\|\leq 1} |f(v)| = \sup_{\|v\|=1} |f(v)|. \tag{4.2}$$

Vale una formula simmetrica rispetto alla (4.2), basata sul Teorema di Hahn–Banach. Questo importante Teorema si può enunciare in varie forme di varia generalità, ricordiamone senza dimostrazione una versione particolarmente semplice:

Teorema 4.9 (Hahn–Banach). *Sia X uno spazio normato su $\mathbb{C}$, Y un suo sottospazio vettoriale, e $g : Y \to \mathbb{C}$ una mappa lineare con la proprietà $|g(w)| \leq \|w\|_X$ per ogni $w \in Y$. Allora g si può estendere a un funzionale lineare $f \in X'$ che verifica $|f(w)| \leq \|w\|_X$ per tutti i $w \in X$.*

Se $v \in X \setminus \{0\}$ è un vettore fissato e applichiamo il Teorema precedente alla mappa $g(zv) = z\|v\|_X$, definita sul sottospazio $Y = \{zv : z \in \mathbb{C}\}$ (la retta complessa generata da v), otteniamo che esiste sempre un funzionale lineare $f \in X'$ con le proprietà $f(v) = \|v\|_X$ (dato che estende g) e $\|f\|_{X'} = 1$ (infatti si ha $|f(w)| \leq \|w\|_X$ per tutti i w e $f(v) = \|v\|_X$). Ne segue la seguente formula, simmetrica rispetto alla (4.2):

Proposizione 4.10. *Sia X uno spazio normato. Allora per ogni $v \in X$ si ha*

$$\|v\|_X = \sup_{\|f\|_{X'}=1} |f(v)|.$$

Osservazione 4.11. X' è sempre uno spazio di Banach anche se X non è completo. Questa affermazione è un caso particolare dell'Esercizio 4.5, vediamo

come si dimostra. Infatti, se (f_k) è una successione di Cauchy in X', si ha per ogni $v \in X$
$$|f_k(v) - f_j(v)| \leq \|f_k - f_j\|_{X'} \|v\|_X \to 0 \quad \text{per} \quad k, j \to \infty$$
ossia la successione $(f_k(v))$ in $\mathbb{C}$ è di Cauchy e quindi converge ad un limite che chiamiamo $f(v)$. Chiaramente $v \mapsto f(v)$ è lineare, e per il Teorema 4.6, o per l'Esercizio 4.7, si ha $f \in X'$ (quest'ultimo fatto si può anche dimostrare direttamente, in modo semplice). Dato che per ipotesi $\|f_k - f_j\|_{X'} \to 0$ per $k, j \to \infty$, passando al limite per $m \to \infty$ si ottiene $\|f_k - f\|_{X'} \to 0$ per $k \to \infty$ e quindi X' è completo.

Definizione 4.12 (Spazio biduale X''). Lo *spazio biduale* X'' é il duale del duale: $(X')'$. Ogni $v \in X$ si può identificare con un elemento $\widehat{v} \in X''$ tramite la formula
$$\widehat{v}(f) := f(v), \qquad f \in X'.$$
La mappa $J : v \mapsto \widehat{v}$ si chiama *immersione canonica* di X in X''.

È facile verificare che J conserva la norma: infatti dalla Proposizione 4.10 si ha
$$\|\widehat{v}\|_{X''} = \sup_{\|f\|_{X'}=1} |\widehat{v}(f)| = \sup_{\|f\|_{X'}=1} |f(v)| = \|v\|_X$$
Quindi J identifica X isometricamente con un sottospazio $J(X)$ di X'', che si indica con $\widehat{X}$. Quando J è suriettivo, ossia $\widehat{X} = X''$, lo spazio X si chiama *riflessivo*.

Lo spazio duale X' permette di definire una seconda nozione di convergenza su X e su X' oltre a quelle in norma, nel modo seguente.

Definizione 4.13. Una successione $(v_k) \subset X$ *converge debolmente* ad un punto $v \in X$ se per ogni $f \in X'$ si ha
$$f(v_k) \to f(v).$$
In questo caso si scrive: $v_k \rightharpoonup v$ per $k \to \infty$.

Una successione $(f_k) \subset X'$ *converge debolmente–$*$* ad un funzionale $f \in X'$ se per ogni $v \in X$ si ha
$$f_k(v) \to f(v).$$
In questo caso si scrive: $f_k \overset{*}{\rightharpoonup} f$ per $k \to \infty$.

Come mostra la seguente proposizione, la convergenza in norma *è più forte* della convergenza debole, e infatti si chiama anche *convergenza forte*.

Proposizione 4.14. *Sia X uno spazio di Banach, $v_k, v \in X$, $f_k, f \in X'$, $k \geq 1$.*

(i) Se $v_k \to v$ in norma allora $v_k \rightharpoonup v$
(ii) Se $v_k \rightharpoonup v$ allora (v_k) è limitata e $\|v\|_X \leq \liminf \|v_k\|_X$
(iii) Se $v_k \rightharpoonup v$ e $f_k \to f$ allora $f_k(v_k) \to f(v)$.

Dimostrazione. (i): se $v_k \to v$, basta scrivere
$$|f(v_k) - f(v)| \leq \|f\|_{X'} \|v_k - v\|_X.$$
Il secondo membro tende a zero e quindi $f(v_k) \to f(v)$ per qualunque $f \in X'$.

(ii): l'ipotesi $f(v_k) \to f(v)$ per ogni $f \in X'$ si può scrivere anche $\widehat{v}_k(f) \to \widehat{v}(f)$; quindi la successione di funzionali $(\widehat{v}_k) \subseteq X''$ soddisfa le ipotesi del Principio di Limitatzza Uniforme. Ne segue che $\sup \|\widehat{v}_k\|_{X''} = \sup \|v_k\|_X < \infty$. Infine scrivendo $|f(v_k)| \leq \|f\|_{X'} \|v_k\|_X$ e prendendo il lim inf si ottiene $|f(v)| \leq \|f\|_{X'} \liminf \|v_k\|_X$; se facciamo il sup per tutte le f con $\|f\|_{X'} = 1$ e ricordiamo la Proposizione 4.10 abbiamo la tesi.

(iii): basta scrivere
$$|f_k(v_k) - f(v)| \leq |f_k(v_k) - f(v_k)| + |f(v_k) - f(v)| \leq \|f_k - f\|_{X'} \|v_k\|_X + |f(v_k) - f(v)|.$$
Il secondo termine tende a 0 per ipotesi; il primo tende a 0 perché $\|v_k\|_X$ è limitata e $f_k \to f$ in norma. □

In modo molto simile si dimostra la proposizione seguente:

Proposizione 4.15. *Sia X uno spazio di Banach, $v_k, v \in X$, $f_k, f \in X'$, $k \geq 1$.*

(i) Se $f_k \rightharpoonup f$ allora $f_k \overset{*}{\rightharpoonup} f$
(ii) Se $f_k \overset{*}{\rightharpoonup} f$ allora (f_k) è limitata e $\|f\|_{X'} \leq \liminf \|f_k\|_{X'}$
(iii) Se $f_k \overset{*}{\rightharpoonup} f$ e $v_k \to v$ allora $f_k(v_k) \to f(v)$.

Dimostrazione. La (i) si dimostra osservando che convergenza debole in X' vuol dire $\phi(f_k) \to \phi(f)$ per ogni $\phi \in X''$, mentre convergenza debole–$*$ vuol dire la stessa cosa ma solo per le $\phi \in \widehat{X}$. Le proprietà (ii), (iii) si dimostrano come nella Proposizione precedente. □

5. Convergenza debole in L^p

Il Teorema di Riesz afferma che se $p \in (1, \infty)$, oppure $p = 1$ e la misura μ è σ–finita, tutti i funzionali continui su $X = L^p(E, \mu)$ sono della forma T_u per qualche $u \in L^{p'}(E, \mu)$:

$$T_u(v) = \int u(x)v(x)d\mu \qquad \text{per ogni} \qquad v \in L^p(E, \mu).$$

Inoltre $\|T_u\|_{X'} = \|u\|_{L^{p'}}$. Pertanto la convergneza debole di una successione di funzionali (T_{u_k}) si può riscrivere in termini della successione di funzioni $u_k \in L^{p'}(E, \mu)$. Lo stesso discorso si applica alla convergenza debole–$*$. Si arriva così alla definizione seguente:

Definizione 5.1. Sia μ una misura positiva sull'insieme E. Siano $u_k, u \in L^p(E, \mu)$, $p \in (1, \infty)$. Diciamo che u_k *converge a u debolmente in L^p*, e scriviamo $u_k \rightharpoonup u$, se si ha

$$\int u_k g \, d\mu \to \int ug \, d\mu \quad \forall g \in L^{p'}(E, \mu). \tag{5.1}$$

Questa definizione vale anche per $p = 1$ se la misura μ è σ–finita.

Siano $u_k, u \in L^\infty(E, \mu)$. Diciamo che u_k *converge a u debolmente–$*$ in L^∞*, e scriviamo $u_k \overset{*}{\rightharpoonup} u$, se si ha

$$\int u_n g \, d\mu \to \int ug \, d\mu \quad \forall g \in L^1(E, \mu). \tag{5.2}$$

Per distinguere la convergenza L^p dalla convergenza debole, si dice anche che u_k converge a *u fortemente in $L^p(E, \mu)$* quando $\|u_k - u\|_{L^p} \to 0$.

Si noti che se $p \in (1, \infty)$ la convergenza debole–$*$ in L^p coincide con quella in L^p, dato che $(L^p)'' = L^p$ (ossia lo spazio L^p è riflessivo). La convergenza debole–$*$ nel caso $p = 1$ e la convergenza debole nel caso $p = \infty$ sono molto più difficili da caratterizzare esplicitamente.

Esercizio 5.2. Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$, ω un aperto contenuto in Ω, $p \in [1, \infty)$ e $f_n, f \in L^p(\Omega)$ tali che $f_n \rightharpoonup f$ in L^p. Dimostrare che se tutte le f_n sono nulle q.o. in ω allora anche il limite debole f è nullo q.o. su ω.

Quali sono gli esempi più significativi di convergenza debole in L^p? Dai risultati generali sappiamo che se una successione (f_k) converge foremente, cioè in norma L^p, allora converge anche debolmente. Ma sarebbe interessante conoscere esempi di successioni che convergono debolmente ma non fortemente.

Un primo esempio semplice è dato dalle successioni che "spostano la massa all'infinito".

Esempio 5.3. Fissiamo una funzione $\phi \in L^p(\mathbb{R})$ non nulla q.o., $p \in (1,\infty)$, e consideriamo la successione delle traslate a $+\infty$ definita come $f_k(x) = \phi(x-k)$. Allora ovviamente

$$f_k(x) = \phi(x-k) \not\to 0 \text{ in } L^p$$

dato che $\|f_k\|_{L^p} = \|\phi\|_{L^p} \neq 0$. Tuttavia si ha

$$f_k(x) = \phi(x-k) \rightharpoonup 0 \text{ in } L^p.$$

Dimostriamolo. Fissiamo un insieme misurabile $E \subset [0,1]$; cambiando variabile $x - k = y$ abbiamo

$$\int f_k(x)\mathbf{1}_E(x)dx = \int \phi(y)\mathbf{1}_E(y+k)dy$$

da cui, chiamando I_k l'intervallo $I_k = [-k, 1-k]$,

$$|\int f_k(x)\mathbf{1}_E(x)dx| \le \int_{I_k} |\phi(y)|dy \le (\int_{I_k} |\phi|^p)^{1/p} \to 0$$

dato che $\sum_k \int_{I_k} |\phi(y)|^p dy \le \|\phi\|_{L^1}^p < \infty$. Ne segue che $\int f_k(x)\mathbf{1}_E(x)dx \to 0$ per qualunque insieme limitato E, e quindi $\int f_k(x)\psi(x)dx \to 0$ per qualunque funzione semplice ψ con supporto limitato. Dato che tali funzioni sono dense in $L^{p'}$ (ricordiamo che $p \in (1,\infty)$), ne segue che $\int f_k(x)\psi(x)dx \to 0$ per qualunque funzione di $L^{p'}$ ossia $f_k \rightharpoonup 0$ in L^p.

Invece se $p = 1$ *non è vero* che $f_k \rightharpoonup 0$ in L^1: infatti la funzione costante $g(x) = 1$ appartiene a $L^\infty = (L^1)'$ ma $\int f_k g dx = \int \phi dx \not\to 0$.

Un secondo esempio più raffinato è dato dalle successioni oscillanti: se una successione oscilla con frequenza crescente allora può accadere che essa converga debolmente ma non fortemente. Studiamo un caso esplicito.

Esempio 5.4 (Teorema di Riemann–Lebesgue). Sia $p \in (1,\infty)$ e $u \in L^p_{loc}(\mathbb{R})$ una funzione periodica di periodo 1. Poniamo $u_n(x) = u(nx)$, $n = 1,2,3,\dots$. Si noti che u_n è una successione limitata in $L^p(0,1)$, anzi si ha $\|u_n\|_{L^p(0,1)} = \|u\|_{L^p(0,1)}$ come si vede con un semplice cambiamento di variabili:

$$\int_0^1 |u(nx)|^p dx = \frac{1}{n}\int_0^n |u(x)|^p dx = \int_0^1 |u(x)|^p dx$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato la periodicità di u.

Poniamo $c := \int_0^1 u(x)dx$ la media di u (finita perché $\int_0^1 |u(x)|dx \le \|u\|_{L^p(0,1)}$). Allora, per ogni $p \in (1,\infty)$,

u_n **converge debolmente in** $L^p(0,1)$ **alla funzione costante** $c = \int_0^1 u dx$

(il risultato è vero anche per $p = 1$ ma bisogna modificare la dimostrazione).

Verifichiamo anzitutto che per qualunque funzione continua f su $[0,1]$ si ha

$$\int_0^1 u(nx)f(x)dx \to \int_0^1 u(x)dx \int_0^1 f(x)dx = c\int_0^1 f(x)dx. \tag{5.3}$$

Infatti, cambiando variabile $x' = nx$ abbiamo

$$\int_0^1 u(nx)f(x)dx = \frac{1}{n}\int_0^n u(x)f(\tfrac{x}{n})dx = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1} u(x)f(\tfrac{x}{n})dx$$

e cambiando ancora variabile $x = x' + k$ negli integrali a destra, e usando la periodicità di u, otteniamo

$$\int_0^1 u(nx)f(x)dx = \int_0^1 u(x)\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\tfrac{x+k}{n})dx.$$

Notiamo adesso che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\tfrac{x+k}{n}) = \int_0^1 f(t)dt$$

perché questa è una somma di Riemann per f, che converge all'integrale di Riemann. Applicando il Teorema della convergenza dominata otteniamo (5.3).

Ora possiamo dimostrare che $u_n \rightharpoonup c$ in L^p per ogni $p \in (1,\infty)$, cioè che la (5.3) vale per ogni $f \in L^{p'}(0,1)$. Infatti, per ogni $\varepsilon > 0$ possiamo trovare per densità $g \in C_c(0,1)$ tale che $\|f-g\|_{L^{p'}} < \varepsilon$. Possiamo scrivere

$|\int_0^1 u_n f dx - c\int_0^1 f dx| \le |\int_0^1 u_n(f-g)dx| + |\int_0^1 u_n g dx - c\int_0^1 g dx| + |c\int_0^1 (g-f)dx|$. Usando la disuguaglianza di Hölder abbiamo

$$|\int_0^1 u_n(f-g)dx| \le \|u_n\|_{L^p(0,1)}\|f-g\|_{L^{p'}(0,1)} \le \|u\|_{L^p(0,1)} \cdot \varepsilon$$

e analogamente

$$|c\int_0^1 (g-f)dx| \le |c|\|g-f\|_{L^{p'}} \le |c|\varepsilon,$$

mentre dalla (5.3) per g continua segue

$$|\int_0^1 u_n g dx - c\int_0^1 g dx| < \varepsilon$$

per n abbastanza grande. In conclusione abbiamo dimostrato che

$$|\int_0^1 u_n f dx - c\int_0^1 f dx| \le (2+|c|)\varepsilon$$

per n abbastanza grande, da cui la tesi.

Osservazione 5.5. Naturalmente la u_n dell'esempio precedente *non converge* in L^p alla costante c. Infatti si ha

$$\|u_n - c\|_{L^p(0,1)} = \|u-c\|_{L^p}$$

e quindi vediamo che $u_n \to c$ in L^p solo se u è proprio la funzione costante $u = c$.

Esercizio 5.6. Dimostrare che la successione u_n costruita nell'esempio 5.4 converge debolmente a c anche negli spazi $L^p(I)$ per qualunque intervallo limitato $I \subset \mathbb{R}$ (e per ogni $p \in [1,\infty)$).

Esercizio 5.7. Generalizzare l'esempio 5.4 al caso di una funzione periodica su $\mathbb{R}^n$.

Proposizione 5.8 (Riesz). *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$, $p \in (1,\infty]$, e u_k una successione limitata in $L^p(\Omega)$. Allora si ha:*

(i) se $1 < p < \infty$, si può estrarre da u_k una sottosuccessione che converge debolmente in $L^p(\Omega)$;

(ii) se $p = \infty$, si può estrarre da u_k una sottosuccessione che converge debolmente–$*$ in $L^\infty(\Omega)$.

Dimostrazione. Sia $1 < p \le \infty$ e $\|u_j\|_{L^p} < M$ per tutti i j. Dato che $L^{p'}$ è separabile, possiamo fissare una successione $D = \{g_j\}$ densa in $L^{p'}(\Omega)$.

La successione numerica $\int u_j g_1 dx$ è limitata da $M\|g_1\|_{L^{p'}}$; quindi possiamo estrarre da u_j una sottosuccessione $u_j^{(1)}$ tale che $\int u_j^{(1)} g_1 dx$ converge. La successione numerica $\int u_j^{(1)} g_2 dx$ è limitata da $M\|g_2\|_{L^{p'}}$; quindi possiamo estrarre da $u_j^{(1)}$ una sottosuccessione $u_j^{(2)}$ tale che $\int u_j^{(2)} g_1 dx$ converge. Continuando in questo modo, ed estraendo la successione diagonale $v_j = u_j^{(j)}$, otteniamo una sottosuccessione tale che $\int v_j g dx$ converge per tutte le $g \in D$.

Ora sia $u \in L^{p'}$ una funzione arbitraria; per ogni $\varepsilon > 0$ possiamo trovare $g \in D$ tale che $\|u-g\|_{L^{p'}} < \varepsilon$ e ciò implica

$$\begin{aligned}\left|\int (v_j - v_k) u dx\right| \le & \left|\int v_j(u-g)\,dx\right| + \left|\int g(v_j - v_k)\,dx\right| + \left|\int v_k(g-u)\,dx\right| \\ \le & 2M\varepsilon + \left|\int g(v_j - v_k)\,dx\right|.\end{aligned}$$

L'ultimo integrale converge a zero per $j,k \to \infty$. Segue facilmente che $\int v_j u dx$ è una successione di Cauchy (in $\mathbb{C}$); chiamiamo il suo limite $T(u)$. È facile verificare che la mappa $u \mapsto T(u)$ è lineare, e dato che $|T(u)| \le M\|u\|_{L^{p'}}$, abbiamo che $T \in (L^{p'})'$. Pertanto il funzionale T si può identificare con una funzione $v \in L^p$ e abbiamo dimostrato che

$$\forall u \in L^{p'} \quad \int v_j u dx \to T(u) = \int vudx.$$

Questo vuol dire proprio che $v_j \rightharpoonup v$ debolmente in L^p se $1 < p < \infty$, e $v_j \overset{*}{\rightharpoonup} v$ debolmente–$*$ in L^∞ se $p = \infty$. □

Osservazione 5.9. Nella dimostrazione precedente abbiamo usato soltanto il fatto che L^p è il duale di uno spazio separabile ossia $L^{p'}$, se $1 < p \le \infty$. In effetti con una dimostrazione identica si può ottenere il risultato molto più generale: *se X è uno spazio di Banach separabile allora da ogni successione limitata di X' si può estrarre una sottosuccessione debolmente–$*$ convergente.*

Osservazione 5.10. Notiamo che il risultato precedente *non vale* in L^1: ossia esistono successioni u_k limitate in $L^1(\Omega)$ da cui non si può estrarre nessuna successione debolmente convergente.

Per verificarlo basta prendere la successione di $L^1(-1,1)$

$$u_k(x) = \frac{k}{2}\mathbf{1}_{(-\frac{1}{k},\frac{1}{k})}$$

che ha norma $\|u_k\|_{L^1} = 1$. Notiamo che per qualunque $f \in C_c(-1,1)$ vale la proprietà

$$\int u_k f dx \to f(0) \tag{5.4}$$

per il Teorema della media integrale.

Supponiamo ora per assurdo che esista una $u \in L^1(-1,1)$ tale che $u_k \rightharpoonup u$ in L^1. Dalla proprietà (5.4) vediamo subito che il limite u non può essere la funzione nulla. D'altra parte, fissato un qualunque ε fra 0 e 1, vediamo che le funzioni u_k sono identicamente nulle su $(\varepsilon, 1)$ per $k > 1/\varepsilon$, quindi anche il limite debole u è uguale a 0 q.o. su $(\varepsilon, 1)$ (grazie all'Esercizio 5.2), Essendo ε arbitrario, abbiamo dimostrato che $u = 0$ q.o. su $(0,1)$. Allo stesso modo si dimostra che $u = 0$ q.o. su $(-1,0)$. In conclusione, $u = 0$ q.o. e questo contraddice la (5.4).

Come caso particolare delle Proposizioni 4.14 e 4.15 otteniamo che le successioni convergenti debolmente, o debolmente–$*$, sono sempre limitate in norma:

Proposizione 5.11. *Siano $u_k, u \in L^p(E,\mu)$ tali che $u_k \rightharpoonup u$ in L^p con $p \in (1,\infty)$, oppure che $u_k \rightharpoonup u$ in L^1 e μ sia σ–finita se $p = 1$, oppure che $u_k \overset{*}{\rightharpoonup} u$ in L^∞ se $p = \infty$. Allora (u_k) è limitata in norma e vale*

$$\|u\|_{L^p} \le \liminf \|u_k\|_{L^p}.$$

Osservazione 5.12. La principale utilità della convergenza debole è che è piuttosto facile costruire successioni convergenti: basta partire da una successione limitata e estrarre un'opportuna sottosuccessione, applicando la Proposizione 5.8 (molto più difficile è costruire successioni che convergono fortemente!).

Sarebbe molto utile avere una proprietà simile in L^1 dove però la proprietà fallisce. Un buon sostituto è la convergenza di misure. Consideriamo lo spazio $ca(\Omega)$ di tutte le misure complesse definite sulla σ–algebra dei boreliani di Ω; ricordiamo che per tali misure la variazione totale $\|\cdot\|_M$ è sempre finita e definisce una norma su $ca(\Omega)$, che risulta uno spazio di Banach. Notiamo che $L^1(\Omega) \subset ca(\Omega)$: infatti, possiamo identificare $u \in L^1(\Omega)$ con la misura complessa su Ω definita come $u(E) = \int_E u(x)dx$, e non è difficile dimostrare che allora $\|u\|_M = \|u\|_{L^1}$, ossia questa immersione è una isometria da $L^1(\Omega)$ a un sottospazio chiuso di $ca(\Omega)$.

Quindi abbiamo immerso $L^1(\Omega)$ in uno spazio leggermente più grande, $ca(\Omega)$. La convergenza forte in $ca(\Omega)$ naturalmente è quella in norma; invece diremo che una successione $\{\mu_k\}_k \subset ca(\Omega)$ *converge debolmente–$*$* a una misura μ se

$$\int_\Omega \phi d\mu_k \to \int_\Omega \phi d\mu \quad \text{per ogni} \quad \phi \in C_c(\Omega)$$

e in questo caso scriveremo $\mu_k \overset{*}{\rightharpoonup} \mu$. (La notazione è giustificata dal fatto che le misure sono in dualità con lo spazio $C_c(\Omega)$: vedi il Teorema di Riesz–Markov nel capitolo precedente per un enunciato preciso).

Il vantaggio di questa costruzione è che nello spazio allargato vale la Proposizione 5.8: *se $\{\mu_k\}_k$ è una successione limitata in $ca(\Omega)$ (ossia $\|\mu_k\|_M < C < \infty$), allora possiamo estrarne una sottosuccessione che converge debolmente–$*$ ad una misura μ.* Però, anche nel caso in cui le μ_k sono funzioni L^1, la misura limite μ potrebbe non essere una funzione: per esempio, la successione u_k dell'Osservazione 5.10 è limitata in L^1 e il suo limite debole–$*$ è la delta di Dirac in 0.