Disuguaglianze di Sobolev

L'appartenenza di una funzione a uno spazio di Sobolev implica che essa possiede un certo grado di regolarità. Ad esempio se $p > n$ le funzioni in $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ sono continue, e addirittura Hölder continue (Teorema di Morrey). Per $p < n$ tale risultato è falso, ma comunque si possono ottenere informazioni non banali di maggiore sommabilità: il Teorema di Gagliardo-Nirenberg-Sobolev afferma che per $p < n$ le funzioni in $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ appartengono a $L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$, dove l'esponente $p^* > p$ è detto esponente di Sobolev coniugato di p. Questa disuguaglianza ha anche una chiarissima interpretazione geometrica: per $p = 1$ essa è legata alla cosiddetta disuguaglianza isoperimetrica.

1. Disuguaglianza di Gagliardo-Nirenberg-Sobolev

Siano $p \in [1, n)$ e $q \in [1, \infty]$. Consideriamo una disuguaglianza del tipo

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)} \qquad \text{per ogni } u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \tag{1.1}$$

e cerchiamo di capire per quali valori di p, q essa è *falsa*. Testiamola su una classe di funzioni di Sobolev: sia $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ non identicamente nulla, e per ogni $\lambda > 0$ poniamo $u_\lambda(x) := u(\lambda x)$. Il cambiamento di variabili $y = \lambda x$ dà le formule

$$\|u_\lambda\|_{L^q} = \Big(\int |u_\lambda|^q\, dx\Big)^{\frac{1}{q}} = \lambda^{-\frac{N}{q}}\|u\|_{L^q},$$

$$\|\nabla u_\lambda\|_{L^p} = \Big(\int |\lambda \nabla u(\lambda x)|^p\, dx\Big)^{\frac{1}{p}} = \lambda^{\frac{p-N}{p}}\|\nabla u\|_{L^p}$$

Quindi, se valesse (1.1), essa dovrebbe in particolare valere per le funzioni u_λ, e quindi avremmo per ogni $\lambda > 0$ la disuguaglianza

$$\lambda^{-\frac{N}{q}}\|u\|_{L^q} \leq C\lambda^{\frac{p-N}{p}}\|\nabla u\|_{L^p} \qquad \forall \lambda > 0$$

chiaramente impossibile se i due esponenti di λ sono diversi. Abbiamo ottenuto una condizione necessaria: la disuguaglianza è possibile solo se $q = \frac{np}{n-p}$.

Definizione 1.1. Se $p \in [1, n]$, il numero $p^* := \frac{np}{n-p}$ è detto *esponente di Sobolev coniugato di p* (con la convenzione $n^* = \infty$).

Il precedente argomento dimostra che la condizione $q = p^*$ è necessaria, ma possiamo dimostrare che essa è anche sufficiente. Premettiamo un lemma:

Lemma 1.2 (Gagliardo-Loomis-Whitney). *Siano $u_1, \ldots, u_n$ funzioni misurabili su $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, tali che u_j è indipendente da x_j. Allora*

$$\|u_1 \ldots u_n\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|u_1\|_{L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})} \ldots \|u_n\|_{L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})} \tag{1.2}$$

Dimostrazione. Possiamo supporre $u_j \geq 0$. Osserviamo inoltre che per $n = 2$ la disuguaglianza è ovvia dal Teorema di Fubini–Tonelli: $\iint u_1(x_2)u_2(x_1)dx_1dx_2 = \int u_1(x_2)dx_2 \cdot \int u_2(x_1)dx_1$. Dimostriamo il risultato per induzione su n: supponiamo che sia valido per un certo n e dimostriamolo per $n+1$. Dalla disuguaglianza di Hölder nell'integrale in $x=(x_1,\dots,x_n)$ si ha

$$\begin{aligned}\int u_1\dots u_{n+1}dxdx_{n+1} &=\int u_{n+1}(\int u_1\dots u_n dx_{n+1})dx\\ &\le \|u_{n+1}\|_{L^n}\cdot\Big(\int(\int u_1\dots u_n dx_{n+1})^{\frac{n}{n-1}}dx\Big)^{\frac{n-1}{n}}\\ &\le \|u_{n+1}\|_{L^n}\cdot\Big(\int(\int u_1^n dx_{n+1})^{\frac{1}{n-1}}\dots(\int u_n^n dx_{n+1})^{\frac{1}{n-1}}dx\Big)^{\frac{n-1}{n}}\end{aligned}$$

dove nell'ultimo passo abbiamo usato la disuguaglianza di Hölder per n funzioni rispetto a x_{n+1}. Usando l'ipotesi di induzione per il prodotto delle n funzioni $(\int u_j^n dx_{n+1})^{\frac{1}{n-1}}$ ottenamo la tesi. $\square$

Teorema 1.3 (Disuguaglianza di Gagliardo-Nirenberg-Sobolev). *Supponiamo $p=n=1$ e quindi $p^*=+\infty$, o $p\in[1,n)$. Allora esiste $C=C(p,n)$ tale che*

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)}\le C\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n))}\qquad \textit{per ogni } u\in W^{1,p}(\mathbb{R}^n). \tag{1.3}$$

Dimostrazione. Dimostreremo la disuguaglianza in tre passi.
Passo 1: $p=1$ e $u\in C^1_c(\mathbb{R}^n)$. In questo caso l'indice coniugato è $1^*=\frac{n}{n-1}$. Dal Teorema fondamentale del calcolo (applicato rispetto alla variabile x_i) si ha

$$|u(x)|\le\int_{-\infty}^{+\infty}|\partial_i u(x_1,x_2,\dots,t_i,\dots,x_n)|\,dt_i\qquad\forall x\in\mathbb{R}^n,\ 1\le i\le n.$$

Si noti che se $n=1$ abbiamo terminato la dimostrazione del Teorema, quindi nel seguito supporremo $n\ge 2$. Elevando ambo i membri alla $\frac{1}{n-1}$ e moltiplicando le n disuguaglianze otteniamo

$$|u(x)|^{\frac{n}{n-1}}\le\prod_{i=1}^n\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|\partial_i u(x_1,x_2,\dots,t_i,\dots,x_n)|\,dt_i\right)^{\frac{1}{n-1}}\qquad\forall x\in\mathbb{R}^n.$$

A questo punto integriamo su $\mathbb{R}^n$ e applichiamo il Lemma 1.2: otteniamo

$$\int|u(x)|^{\frac{n}{n-1}}dx\le\prod_{i=1}^n\left\|\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|\partial_i u|dx_i\right)^{\frac{1}{n-1}}\right\|_{L^{n-1}}=\prod_{i=1}^n\|\partial_i u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{n-1}}\le\|\nabla u\|_{L^1}^{\frac{n}{n-1}}$$

dato che $|\partial_i u|\le|\nabla u|$, da cui segue la tesi.

Passo 2: $1<p<n$ e $u\in C^1_c(\mathbb{R}^n)$. Sia $\gamma>1$. Allora $|u|^\gamma$ è in C^1_c e $|\nabla|u|^\gamma|=\gamma|u|^{\gamma-1}|\nabla u|$. Applicando il Passo 1 a $|u|^\gamma$ e poi Hölder otteniamo

$$\|u\|^\gamma_{L^{\frac{n}{n-1}\gamma}}\le\gamma\||u|^{\gamma-1}\nabla u\|_{L^1}\le\gamma\||u|^{\gamma-1}\|_{L^{p'}}\|\nabla u\|_{L^p}=\gamma\|u\|^{\gamma-1}_{L^{p'(\gamma-1)}}\|\nabla u\|_{L^p}.$$

Scegliamo ora γ tale che $\frac{n}{n-1}\gamma=p'(\gamma-1)$ ossia $\gamma=\frac{n-1}{n-p}p>1$; notiamo che allora $\frac{n}{n-1}\gamma=p'(\gamma-1)$ è uguale a p^* e quindi abbiamo dimostrato che

$$\|u\|^\gamma_{L^{p^*}}\le\gamma\|u\|^{\gamma-1}_{L^{p^*}}\|\nabla u\|_{L^p}$$

da cui la disuguaglianza desiderata.

Passo 3: Caso generale. Sia $\{u_k\}\subset C^1_c(\mathbb{R}^n)$ convergente a u in $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Per il Passo 2 $\{u_k\}$ è di Cauchy in $L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$. Quindi u_k converge in $L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$, e chiaramente si ha anche $u_n\to u$ in L^p. Possiamo quindi passare al limite nella disuguaglianza del Passo 2 $\|u_k\|_{p^*}\le C\|\nabla u_k\|_p$, ottenendo la stessa disuguaglianza per u. $\square$

Corollario 1.4. *Sia $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ un aperto qualunque. Allora (1.3) vale per ogni $u\in W^{1,p}_0(\Omega)$, con $C=C(p,n)$ indipendente da Ω.*

Dimostrazione. La (1.3) vale per le funzioni di $C^\infty_c(\Omega)$. Dato che ogni $u\in W^{1,p}_0(\Omega)$ è limite di una successione di funzioni di $C^\infty_c(\Omega)$ nella norma $W^{1,p}$, passando al limite nella (1.3) otteniamo che la disuguaglianza vale anche per u. $\square$

Forniamo ora una versione locale del Teorema 1.3.

Teorema 1.5 (Disuguaglianza di G-N-S in Ω). *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato con frontiera C^1 e sia $p = n = 1$ o $p \in [1, n)$. Esiste $C = C(p, n, \Omega)$ tale che*

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \qquad \text{per ogni } u \in W^{1,p}(\Omega). \tag{1.4}$$

In particolare $u \in L^q(\Omega)$ per ogni $1 \leq q \leq p^*$.

Dimostrazione. Sia T l'operatore di estensione da $W^{1,p}(\Omega)$ a $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ e C_T la corrispondente costante. Per ogni $u \in W^{1,p}(\Omega)$ si ha allora

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq \|Tu\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|\nabla Tu\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq CC_T\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

□

Esempio 1.6 (Il caso critico $p = n$). Osserviamo che se $u \in W^{1,n}(\Omega)$, con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato con frontiera C^1, allora $u \in L^q(\Omega)$ per ogni $1 \leq q < +\infty$, ma non $q = +\infty$. Consideriamo infatti la funzione

$$u(x) := \log(\log(1 + |x|^{-1})) \qquad \forall\, x \in B(0, 1) \subset \mathbb{R}^n.$$

Si verifica facilmente che $u \in W^{1,n}(B(0, 1))$, ma u evidentemente non è limitata (né continua), e quindi le immersioni di $W^{1,n}$ in L^∞ e in C^0 non sussistono.

Esempio 1.7. Con un ragionamento simile al Passo 1 del Teorema 1.3, ripetuto sulle derivate successive di u, si può dimostrare facilmente la disuguaglianza

$$|u(x)| \leq \int |\partial_1 \ldots \partial_n u| dy$$

da cui segue la stima

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|\partial_1 \ldots \partial_n u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

In altri termini, la norma L^∞ di u è controllata dalla norma $W^{n,1}$ di u, e dato che le funzioni regolari sono dense in $W^{n,1}$, otteniamo anche che le funzioni di $W^{n,1}$ sono continue. Questo si applica in particolare al caso $n = 1$; le funzioni di $W^{1,1}(I)$ su un intervallo reale I sono continue (anzi assolutamente continue).

2. Disuguaglianza isoperimetrica

Il problema isoperimetrico consiste nel cercare forme che massimizzino il volume tra tutti gli insiemi con fissato perimetro, o equivalentemente che minimizzino il perimetro a volume fissato. Tale problema è in qualche senso legato alla disuguaglianza di G-N-S. Faremo una digressione su questo problema classico del calcolo delle variazioni, dando solo una panoramica sulla tematica, senza fornire dimostrazioni rigorose.

Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato con frontiera di classe C^2, e per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $u_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita da

$$u_k(x) := \max\{0, 1 - k\,\mathrm{dist}(x, E)\} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Si può dimostrare che, per k sufficientemente grande,

$$|\nabla u_k| = k\mathbf{1}_{F_k}, \qquad \lambda(F_k) = a_k\frac{Per(E)}{k}, \tag{2.1}$$

dove $F_k := (E + B(0, \frac{1}{k})) \setminus E$ e $a_k \to 1$ per $k \to +\infty$. La notazione $Per(E)$, di uso comune in Calcolo delle Variazioni, indica la misura $n - 1$ dimensionale della frontiera ∂E, detta anche *perimetro* di E.

Quindi possiamo scrivere

$$Per(E) = \tfrac{1}{a_k}k\lambda(F_k) = \tfrac{1}{a_k}\int |\nabla u_k| dx \geq \tfrac{1}{a_k}\|u_k\|_{L^{1^*}} \to \lambda(E)^{\frac{1}{1^*}} = \lambda(E)^{\frac{n}{n-1}}$$

dove abbiamo utilizzato la disuguaglianza $\|u\|_{L^{\frac{n}{n-1}}} \leq \|\nabla u\|_{L^1}$ del Teorema 1.3 con costante 1 (vedi il Passo 1 della dimostrazione del Teorema). Quindi per tutti gli aperti limitati con frontiera regolare vale la disuguaglianza

$$\lambda(E) \leq Per(E)^{\frac{n}{n-1}}, \tag{2.2}$$

detta *disuguaglianza isoperimetrica*. Si noti che il rapporto $\lambda(E)/Per(E)^{\frac{n}{n-1}}$ è invariante per omotetie di E, come è giusto che sia per una disuguaglianza che non deve dipendere dal fattore di scala.

In realtà la disuguaglianza si può migliorare: si può dimostrare che per una certa costante $C < 1$ si ha

$$\lambda(E) \leq C\, Per(E)^{\frac{n}{n-1}}. \tag{2.3}$$

Si può dimostrare che esiste una costante minima $C = C_{iso}$ tale che la (2.3) è vera per tutti gli insiemi; C_{iso} si chiama *costante isoperimetrica*. Ad esempio per $n = 2$ si ha $C_{iso} = 1/(4\pi)$:

$$\lambda(E) \leq \frac{1}{4\pi} Per(E)^2$$

per tutti gli insiemi regolari limitati $E \subset \mathbb{R}^2$. Questo risultato conduce al *problema isoperimetrico*: tra tutti gli insieme di perimetro fissato, ne esiste uno di volume massimo, e qual è? ossia, esiste un insieme per cui si ha l'uguaglianza in (2.3) con $C = C_{iso}$? La soluzione, dovuta a De Giorgi, afferma che tra tutti gli *insiemi di perimetro finito* con perimetro fissato la palla Euclidea è quello che massimizza la misura di Lebesgue. (Ricordiamo che la nozione di insieme di perimetro finito e la corrispondente nozione di perimetro per insiemi misurabili non regolari sono state introdotte da Caccioppoli e dallo stesso De Giorgi).

3. Immersioni compatte

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato con frontiera C^1, e sia $\{u_k\}$ una successione limitata in $W^{1,p}(\Omega)$, con $1 \leq p < n$. Per quanto visto $\{u_k\}$ è limitata in $L^q(\Omega)$ per ogni $1 \leq q \leq p^*$, e quindi, se $1 < q \leq p^*$, ammette sottosuccessioni convergenti debolmente in $L^q(\Omega)$. Vedremo che in realtà per $1 \leq q < p^*$, $\{u_k\}$ ammette sottosuccessioni convergenti fortemente in $L^q(\Omega)$.

Nel seguito $\rho_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\rho(x/\varepsilon)$ è la consueta famiglia di mollificatori standard.

Lemma 3.1. *Se $v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ con $p \in [1, +\infty)$ si ha*

$$\|\rho_\varepsilon * v - v\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \varepsilon \|\nabla v\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Dimostrazione. Se $v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, detta $v^\varepsilon = \rho_\varepsilon * v$ la sua regolarizzata standard, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} v^\varepsilon(x) - v(x) &= \textstyle\int \rho_1(y)[v(x - \varepsilon y) - v(x)]dy = \int \rho_1(y) \int_0^1 \frac{d}{dt} v(x - \varepsilon t y) dt dy \\ &= -\,\varepsilon \textstyle\int_0^1 \int \rho_1(y) \nabla v(x - \varepsilon t y) \cdot y\, dy dt. \end{aligned}$$

Notiamo che $|y| \leq 1$ sul supporto di ρ_1. Applicando la disuguaglianza integrale di Minkowski otteniamo allora

$$\|v^\varepsilon - v\|_{L^p} \leq \varepsilon \textstyle\int_0^1 \int \rho_1(y) \|\nabla v\|_{L^p} dy dt \leq \varepsilon \|\nabla v\|_{L^p}.$$

Con un semplice ragionamento di densità questa disuguaglianza si estende a qualunque funzione $v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ (infatti se $v_k \to v$ in $W^{1,p}$ allora anche $v_k^\varepsilon \to v^\varepsilon$ in $W^{1,p}$ per ogni ε fissato). $\square$

Lemma 3.2. *Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ con frontiera C^1, $p \in [1, n)$, e $\{u_k\} \subset W^{1,p}(\Omega)$ una successione. Se $\{u_k\}$ è limitata in $W^{1,p}(\Omega)$ e convergente in $L^p(\Omega)$ ad $u \in L^p(\Omega)$, allora converge ad u in $L^q(\Omega)$ per ogni $q \in [1, p^*)$.*

Dimostrazione. Caso 1: $q \in [1,p]$. Essendo Ω limitato, si ha

$$\|u_k - u_j\|_{L^q(\Omega)} \leq \lambda(\Omega)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|u_k - u_j\|_{L^p(\Omega)}.$$

Quindi la successione è di Cauchy anche in $L^q(\Omega)$ e converge ad una funzione di $L^q(\Omega)$ che deve coincidere con u (dato che è possibile estrarre sottosuccessioni convergenti q.o.).

Caso 2: $q \in [p, p^*)$. Usando la disuguaglianza di interpolazione per spazi L^p possiamo scrivere

$$\|u_k - u_j\|_{L^q(\Omega)} \leq \|u_k - u_j\|_{L^p(\Omega)}^{1-\theta} \|u_k - u_j\|_{L^{p^*}(\Omega)}^{\theta}$$

dove $\theta \in [0,1]$ è tale che

$$\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{p} + \frac{\theta}{p^*}.$$

Si noti che essendo $q < p^*$ si ha sempre $\theta < 1$. Dato che la successione è limitata in $L^{p^*}(\Omega)$ (come segue dal Teorema 1.3) deduciamo che

$$\|u_k - u_j\|_{L^q(\Omega)} \leq C \|u_k - u_j\|_{L^p(\Omega)}^{1-\theta}$$

dove $1-\theta > 0$. Pertanto la successione è di Cauchy anche in $L^q(\Omega)$ e la conclusione segue come nel caso precedente. □

Teorema 3.3 (Rellich–Kondrachov). *Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ con frontiera C^1, $p \in [1,n)$, e $\{u_k\} \subset W^{1,p}(\Omega)$ una successione limitata. Allora $\{u_k\}$ ammette per ogni $q \in [1, p^*)$ una sottosuccessione convergente in $L^q(\Omega)$.*

Dimostrazione. Grazie al Teorema di Estensione, possiamo estendere le u_k a tutto $\mathbb{R}^n$ ottenendo una successione limitata di $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, che indichiamo ancora con $\{u_k\}$. Possiamo supporre che le estensioni abbiano supporto dentro un compatto indipendente da k. Notiamo che

$$\|\rho_\varepsilon\|_{L^r} = \left(\int \varepsilon^{-nr} \rho(x/\varepsilon)^r dx\right)^{\frac{1}{r}} = \left(\int \varepsilon^{n-nr} \rho(y)^r dy\right)^{\frac{1}{r}} = C\varepsilon^{\frac{n}{r}-n}, \tag{3.1}$$

Consideriamo ora la successione delle regolarizzate $\{u_k^\varepsilon\}$. Dal Lemma precedente

$$\|u_k^\varepsilon - u_k\|_{L^p} \leq \varepsilon \int_0^1 \int \rho_1(y) \|\nabla u_k\|_{L^p} dy dt \leq C\varepsilon \tag{3.2}$$

con C indipendente da ε e k dato che la successione $\{u_k\}$ è limitata in $W^{1,p}$. Da (3.1) (con $r = p'$) e dalla disuguaglianza di Young abbiamo subito

$$|u_k^\varepsilon(x)| \leq \|\rho_\varepsilon\|_{L^{p'}} \|u_k\|_{L^p} \leq C\varepsilon^{-\frac{n}{p}}$$

dato che la successione è limitata in L^p, e

$$|\nabla u_k^\varepsilon(x)| = |\rho_\varepsilon * \nabla u_k(x)| \leq \|\rho_\varepsilon\|_{L^{p'}} \|\nabla u_k\|_{L^p} \leq C\varepsilon^{-\frac{n}{p}}$$

con C independente da ε e k. Le ultime due disuguaglianze implicano che per ogni ε fissato la successione $\{u_k^\varepsilon\}$ è equilimitata ed equicontinua; grazie al Teorema di Ascoli–Arzelà possiamo estrarre una sottosuccessione che converge uniformemente su $\mathbb{R}^n$ e in particolare su Ω. Essendo Ω limitato, la convergenza uniforme implica la convergenza in ogni $L^q(\Omega)$ con $q \in [1, +\infty]$.

Dimostriamo adesso che è possibile estrarre una sottosuccessione convergente in $L^p(\Omega)$. Anzitutto, per ogni $\varepsilon > 0$ fissato possiamo estrarre una sottosuccessione $\{u_{k_j}^\varepsilon\}$ che converge in $L^p(\Omega)$; da (3.2) si ha

$$\begin{aligned}\|u_{k_j} - u_{k_i}\|_{L^p} \leq & \|u_{k_j} - u_{k_j}^\varepsilon\|_{L^p} + \|u_{k_j}^\varepsilon - u_{k_i}^\varepsilon\|_{L^p} + \|u_{k_i}^\varepsilon - u_{k_i}\|_{L^p} \\ \leq & 2C\varepsilon + \|u_{k_j}^\varepsilon - u_{k_i}^\varepsilon\|_{L^p}.\end{aligned}$$

L'ultimo termine tende a 0 per $j, i \to +\infty$, quindi eliminando al più un numero finito di termini dalla sottosuccessione possiamo rendere anch'esso minore di $C\varepsilon$.

Vediamo così che per qualunque $\varepsilon > 0$ è possibile estrarre una sottosuccessione $\{u_{k_j}\}$ dalla successione $\{u_k\}$ con la proprietà

$$\|u_{k_j} - u_{k_i}\|_{L^p} \leq 3C\varepsilon \qquad \text{per ogni } j, i \geq 1. \tag{3.3}$$

Per concludere basta applicare un procedimento diagonale: prendiamo $\epsilon = 1$ ed estraiamo da $\{u_k\}$ una sottosuccessione che soddisfa (3.3) con $\varepsilon = 1$; chiamiamola $\{u_{1,k}\}$. Poi prendiamo $\varepsilon = 1/2$ e da $\{u_{1,k}\}$ estraiamo una sottosucessione che verifica (3.3) con $\varepsilon = 1/2$, che chiamiamo $\{u_{2,k}\}$; e così via con $\varepsilon = 1/3, 1/4, \ldots$. La successione diagonale $\{u_{k,k}\}$ converge in $L^p(\Omega)$.

Per concludere la dimostrazione è ora sufficiente applicare il Lemma 3.2. $\square$

Esercizio 3.4. Mostrare costruendo un controesempio che il Teorema 3.3 non sussiste per $q = p^*$.

Corollario 3.5. *Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ con frontiera C^1, e $p \in [1, +\infty]$. Allora da ogni successione limitata in $W^{1,p}(\Omega)$ è possibile estrarre una sottosuccessione convergente in $L^p(\Omega)$.*

Dimostrazione. Sia $\{u_k\}$ limitata in $W^{1,p}(\Omega)$. Se $p < n$ il risultato segue dal Teorema di Rellich–Kondrachov. Se invece $p \in [n, +\infty)$, dato che l'aperto Ω è limitato, la successione è limitata anche in $W^{1,q}(\Omega)$ per qualunque $q < n$, e quindi, sempre per il Teorema, è possibile estrarre una sottosuccessione convergente in $L^r(\Omega)$ per qualunque $r < q^*$. Dato che è possibile scegliere q in modo che $q < p < q^*$, anche in questo caso otteniamo la tesi. Infine, se $p = +\infty$, le u_k sono equilischitziane, e quindi dal Teorema di Ascoli–Arzelà otteniamo la tesi. $\square$

Osservazione 3.6. Si noti che nel caso $p > n$ la convergenza si ha anche in $L^\infty(\Omega)$, ossia la sottosuccessione estratta converge *uniformemente* (questo risultato segue dalla disuguaglianza di Morrey, che dimostreremo più avanti, e dal Teorema di Ascoli–Arzelà).

4. Disuguaglianze di Poincaré

Le disuguaglianze di Poincaré permettono di stimare la norma L^p di una funzione con la norma L^p del suo gradiente.

Teorema 4.1 (Disuguaglianza di Poincaré). *Sia $p \in [1, \infty)$ e Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ contenuto in una striscia $\{x \in \mathbb{R}^n : a \leq x_n \leq b\}$. Allora*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq |a - b| \cdot \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \quad \textit{per ogni} \quad u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Dimostrazione. Supponiamo $u \in C_c^\infty(\Omega)$. Allora possiamo scrivere $u(x) = \int_a^{x_n} \partial_n u(x', t)dt$, dove $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$, e otteniamo

$$|u(x)| \leq \int_a^b |\partial_n u(x', t)|dt \leq |a - b|^{\frac{1}{p'}} \left(\int_a^b |\partial_n u(x', t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

grazie alla disuguaglianza di Hölder. Questo implica

$$\int_a^b |u(x', t)|^p dt \leq |a - b|^p \int_a^b |\partial_n u(x', t)|^p dt.$$

Integrando in dx' e osservando che $|\partial_n u| \leq |\nabla u|$ otteniamo la tesi. Nel caso generale $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, il risultato segue per la densità delle funzioni test in $W_0^{1,p}(\Omega)$. $\square$

Osservazione 4.2. Il Teorema 4.1 chiaramente non vale per $u \in W^{1,p}(\Omega)$ (basta considerare le funzioni costanti). Inoltre non vale se viene rimossa l'ipotesi che Ω sia contenuto in una striscia, e la verifica di questo fatto costituisce un utile esercizio (considerare funzioni che sono costanti su insiemi che invadono $\mathbb{R}^n$). Invece, non è indispensabile che la striscia sia ortogonale alla direzione x_n; si può supporre che Ω sia contenuto fra due iperpiani paralleli qualunque.

Osservazione 4.3 (Norma equivalente su $W_0^{1,p}$). Se $p \in [1, \infty)$ poniamo

$$\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} := \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \qquad \text{per ogni } u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Per la disuguaglianza di Poincaré questa è una norma su $W_0^{1,p}(\Omega)$ (se Ω è limitato in una direzione), equivalente alla norma usuale $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.

Definizione 4.4 (Media di una funzione). Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ e sia $u \in L^1(\Omega)$. La *media di u su Ω* è il numero

$$⨍_\Omega u dx := \frac{1}{\lambda(\Omega)} \int_\Omega u(x) dx$$

Teorema 4.5 (Disuguaglianza di Poincaré-Wirtinger). *Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$, connesso e con frontiera C^1, e sia $p \in [1, \infty)$. Allora*

$$\left\| u - ⨍_\Omega u\, dx \right\|_{L^p(\Omega)} \le C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^n)} \qquad \textit{per ogni } u \in W^{1,p}(\Omega).$$

Dimostrazione. Un modo equivalente di enunciare il risultato è che se $u \in W^{1,p}(\Omega)$ ha media nulla, allora vale $\|u\|_{W^{1,p}} \le C\|\nabla u\|_{L^p}$.

Per dimostrarlo, supponiamo per assurdo che esista una successione di funzioni $\{u_k\} \subset W^{1,p}(\Omega)$ a media nulla tali che $\|u_k\|_{L^p} \ge k\|\nabla u_k\|_{L^p}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Dividendo ogni funzione per la sua norma, possiamo supporre inoltre che $\|u_k\|_{L^p} = 1$ per ogni n, e quindi $\|\nabla u_k\|_{L^p} \to 0$. In particolare $\{u_k\}$ è limitata in $W^{1,p}(\Omega)$ e quindi possiede una sottosuccessione convergente in $L^p(\Omega)$ (vedi l'Osservazione 3.6), che indicheremo per semplicità ancora con $\{u_k\}$; sia $u \in L^p(\Omega)$ il suo limite. Dato che tutte le u_k hanno media nulla e norma 1, anche il limite u deve avere media nulla e norma 1.

Notiamo adesso che per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ e $i = 1, \dots, n$ si ha

$$\textstyle\int_\Omega u\, \partial_i \varphi dx = \lim\limits_{k\to+\infty} \int_\Omega u_k\, \partial_i \varphi dx = \lim\limits_{k\to+\infty} - \int_\Omega \partial_i u_k\, \varphi dx = 0$$

dato che $\nabla u_k \to 0$ in L^p, e questo vuol dire che $\nabla u = 0$ q.o. per il Lemma di Du Bois–Reymond. Essendo Ω connesso, u coincide con una costante q.o. (vedi il capitolo sulle distribuzioni). Ma u è a media nulla quindi $u = 0$ q.o., il che è impossibile dato che u ha norma 1. $\square$

5. Teorema di Morrey

Definizione 5.1 (Funzioni Hölderiane). Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto e $0 < \gamma < 1$. Diciamo che f è *γ-Hölderiana*, e scriviamo $f \in C^{0,\gamma}(\Omega)$, se esiste $c \ge 0$ tale che

$$|f(x) - f(y)| \le c|x-y|^\gamma \qquad \forall\, x, y \in \Omega.$$

Con $C^{0,\gamma}(\Omega)$ si indica lo spazio di tutte le funzioni γ–hölderiane limitate, munito della norma

$$\|u\|_{C^{0,\gamma}(\Omega)} := \|u\|_{C^0(\Omega)} + \sup_{x\ne y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\gamma}.$$

Teorema 5.2 (Teorema di Morrey). *Sia $p \in (n, \infty]$, e sia $\gamma := 1 - \frac{n}{p}$. Allora ogni $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ ha un rappresentante che appartiene a $C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)$, ed esiste $C = C(n,p)$ tale che*

$$\|u\|_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \le C\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}. \tag{5.1}$$

Dimostrazione. Supponiamo per il momento che $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \cap C^1(\mathbb{R}^n)$, e dimostriamo la seguente stima: detta $B_r = B(0,r)$ la palla di raggio r nell'origine, per ogni $v \in C^1(\mathbb{R}^n)$ con $v(0) = 0$ si ha

$$\int_{B_r} |v(y)| dy \le r^n \int_{B_r} \frac{|\nabla v(y)|}{|y|^{n-1}} dy. \tag{5.2}$$

In coordinate polari si ha

$$\begin{aligned}
\textstyle\int_{B_r} |v(y)|dy &= \textstyle\int_0^r \int_{\partial B_\rho} |v(z)|dS_z d\rho \\
&= \textstyle\int_0^r \int_{\partial B_\rho} \left(\left|\int_0^1 \frac{d}{dt}v(tz)dt\right|\right) dS_z d\rho && (\text{dato che } v(0)=0) \\
&\le \textstyle\int_0^r \int_{\partial B_\rho} \left(\int_0^1 |\nabla v(tz)|\, \rho dt\right) dS_z d\rho && (dS_z:\ z=\rho w) \\
&= \textstyle\int_0^r \rho^{n-1} \int_{\partial B_1} \int_0^1 |\nabla v(t\rho w)|\, \rho dt dS_w d\rho && (dt:\ t=\tfrac{\sigma}{\rho}) \\
&= \textstyle\int_0^r \rho^{n-1} \int_0^\rho \int_{\partial B_1} |\nabla v(\sigma w)|\, dS_w d\sigma d\rho && (\text{Fubini}) \\
&= \textstyle\int_0^r \rho^{n-1} \int_0^\rho \int_{\partial B_1} |\nabla v(\sigma w)|\, \sigma^{1-n} dS_w \sigma^{n-1} d\sigma d\rho \\
&= \textstyle\int_0^r \rho^{n-1} \int_{B_\rho} |\nabla v(y)|\, |y|^{1-n} dy d\rho && (y=\sigma w) \\
&\le \textstyle\int_{B_r} |\nabla v(y)|\, |y|^{1-n} dy \cdot \int_0^r \rho^{n-1} d\rho \le r^n \int_{B_1} |\nabla v(y)|\, |y|^{1-n} dy
\end{aligned}$$

(dato che $\int_0^r \rho^{n-1} d\rho = n^{-1} r^n \le r^n$) e la (5.2) è dimostrata. Se ora $u \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$ qualunque, fissato x, possiamo applicare la (5.2) a $v(y) = u(x+y) - u(x)$, e dopo il cambiamento di variabile $y = z - x$ otteniamo

$$\int_{B_r(x)} |u(z) - u(x)|dz \le r^n \int_{B_r(x)} \frac{|\nabla u(z)|}{|z-x|^{n-1}} dz. \tag{5.3}$$

Osserviamo ora che per $x, y \in \mathbb{R}^n$, posto $r = |x-y|$ e $W = B_r(x) \cap B_r(y)$, possiamo scrivere

$$|u(x) - u(y)| = \lambda^n(W)^{-1} \textstyle\int_W |u(x) - u(y)|dz = cr^{-n} \int_W |u(x) - u(y)|dz$$

dato che $\lambda^n(W) = cr^n$, e per la disuguaglianza triangolare abbiamo

$$\le cr^{-n} \left(\textstyle\int_W |u(z) - u(x)|dz + \int_W |u(z) - u(y)|dz\right).$$

I due addendi si stimano nello stesso modo, stimiamo il primo. Usando (5.3) si ha

$$r^{-n} \textstyle\int_W |u(z) - u(x)|dz \le r^{-n} \int_{B_r(x)} |u(z) - u(x)|dz \le \int_{B_r(x)} |z-x|^{1-n} |\nabla u(z)|dz$$

e applicando Hölder otteniamo

$$r^{-n} \textstyle\int_{B_r(x)} |u(z) - u(x)|dz \le \||\cdot - x|^{1-n}\|_{L^{p'}(B_r(x))} \|\nabla u\|_{L^p}$$

dove p' è l'indice coniugato di p e quindi $1 \le p' < \frac{n}{n-1}$ dato che $n < p \le +\infty$. Calcoliamo la prima norma a destra:

$$\||\cdot - x|^{1-n}\|_{L^{p'}(B_r(x))}^{p'} = \textstyle\int_0^r \rho^{(1-n)(p'-1)} d\rho = \frac{r^{(1-n)(p'-1)+1}}{(1-n)(p'-1)+1}.$$

La norma è finita dato che $(1-n)(1-p') > -1$, ossia $p' < \frac{1}{n-1} + 1 = \frac{n}{n-1}$ come sappiamo, e otteniamo

$$\||\cdot - x|^{1-n}\|_{L^{p'}(B_r(x))} = C(p,n) r^{(1-n)(1-1/p')+1/p'} = Cr^{1-n/p}.$$

In conclusione, dato che $r = |x-y|$, abbiamo ottenuto la disuguaglianza

$$|u(x) - u(y)| \le c|x-y|^{1-n/p} \|\nabla u\|_{L^p} \tag{5.4}$$

che dimostra che u è γ–hölderiana per $\gamma = 1 - n/p$.

Resta da stimare $\|u\|_{L^\infty}$. Presa una qualunque palla chiusa $B = \overline{B(x,1)}$ di raggio 1, e detto x_0 il punto di minimo di $|u|$ su B, abbiamo

$$|u(x_0)| \le \lambda^n(B)^{-1/p} (\textstyle\int_B |u(x)|^p dx)^{1/p} \le c\|u\|_{L^p}.$$

Se x è un qualunque altro punto di B, applicando la (5.4) otteniamo, dato che $|x - x_0| \le 2$,

$$|u(x)| \le |u(x) - u(x_0)| + |u(x_0)| \le c2^{1-n/p} \|\nabla u\|_{L^p} + c\|u\|_{L^p} \le c\|u\|_{W^{1,p}}.$$

Dato che la palla B e quindi il punto x sono arbitrari, abbiamo dimostrato che

$$\|u\|_{L^\infty} \leq c\|u\|_{W^{1,p}} \tag{5.5}$$

che insieme alla (5.4) dà la tesi.

Infine, sia $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ qualunque; allora possiamo trovare u_k funzioni test tali che $u_k \to u$ in $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Applicando la (5.6) alle u_k

$$\|u_k\|_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u_k\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}$$

e passando al limite per $k \to +\infty$, concludiamo la dimostrazione del Teorema. □

Grazie al Teorema di Estensione, il teorema vale anche in un aperto limitato regolare:

Corollario 5.3. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ limitato con frontiera C^1, $p \in (n, \infty]$, e sia $\gamma := 1 - \frac{n}{p}$. Allora ogni $u \in W^{1,p}(\Omega)$ ha un rappresentante che appartiene a $C^{0,\gamma}(\Omega)$, ed esiste $C = C(n,p)$ tale che*

$$\|u\|_{C^{0,\gamma}(\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}. \tag{5.6}$$

Osservazione 5.4. In realtà visto che la regolarità Hölder è una proprietà locale, deduciamo che, qualunque sia Ω aperto, se $u \in W^{1,p}(\Omega)$ con $p > n$, allora u è localmente Hölderiana.

Si noti anche che per $p = +\infty$ il Teorema di Morrey si riduce alla lipschitzianità delle funzioni $W^{1,\infty}$.

Osservazione 5.5. Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ con frontiera C^1, e sia $1 \leq p < +\infty$. Dal teorema di Rellich–Kondrachov segue facilmente che se u_k converge debolmente ad u in $W^{1,p}(\Omega)$, allora la convergenza è forte in $L^p(\Omega)$. Il caso $p > n$ può essere dimostrato ancora più semplicemente come conseguenza del Teorema di Morrey e del Teorema di Ascoli Arzelà.

6. Disuguaglianze di Sobolev generalizzate

Le disuguaglianze di Sobolev e Morrey per funzioni $W^{1,p}$ si estendono facilmente al caso di funzioni $W^{k,p}$. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato con frontiera C^1, e studiamo in dettaglio il caso $k = 2$.

Data $u \in W^{2,p}(\Omega)$, consideriamo tre casi:

Primo caso: $\frac{n}{2} < p < n$. Per definizione $\nabla u \in W^{1,p}(\Omega)$, e applicando il Teorema di G-N-S otteniamo $u \in W^{1,p^*}(\Omega)$ dove

$$p^* = \frac{np}{n-p} > \frac{n^2}{2}\frac{1}{n/2} = n.$$

Ne segue che $u \in C^{0,\gamma}(\Omega)$ con $\gamma = 1 - \frac{n}{p^*} = 2 - \frac{n}{p}$.

Secondo caso: $p = n$. Da $\nabla u \in W^{1,p}(\Omega)$ deduciamo $\nabla u \in L^q(\Omega)$ per ogni $1 \leq q < +\infty$. Quindi $u \in C^{0,\gamma}(\Omega)$ per ogni $0 < \gamma < 1$.

Terzo caso: $p > n$. Abbiamo allora $\nabla u \in C^{0,\gamma}(\Omega)$, il che significa $u \in C^{1,\gamma}(\Omega)$ per $\gamma = 1 - \frac{n}{p}$.

I casi $1 \leq p < \frac{n}{2}$ e $p = \frac{n}{2}$ sono lasciati per esercizio.

Con calcoli analoghi, per $k \geq 1$ si ottiene il risultato seguente:

Teorema 6.1 (Disuguaglianze di Sobolev generalizzate). *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato con frontiera C^1, $k \in \mathbb{N}$ e $u \in W^{k,p}(\Omega)$.*

i) Se $p < \frac{n}{k}$, allora $u \in L^q(\Omega)$ per ogni $1 \leq q \leq \frac{pn}{n-kp}$.
ii) Se $p = \frac{n}{k}$, allora $u \in L^q(\Omega)$ per ogni $1 \leq q < +\infty$.

iii) Se $\frac{n}{k-1} > p > \frac{n}{k}$*, allora* $u \in C^{0,\gamma}(\Omega)$ *dove*

$$\gamma := \begin{cases} k - \frac{n}{p} & \textit{se } \frac{n}{p} \notin \mathbb{N}; \\ \textit{qualunque numero in } [0,1) & \textit{se } \frac{n}{p} \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Dimostrazione. I dettagli della dimostrazione sono omessi. □