IAS, Esercizi 1

Nome: *Cognome:* *Matricola:*

Regole: Voto minimo di ogni esercizio = 0. Esercizi 1–3: risposta giusta = +1, risposta non data = 0, risposta sbagliata = −1. Esercizi 4–5: punti 0–9.

Esercizio 1 Determinare se le seguenti funzioni definite su ogni insieme di Borel $F \in 2^{\mathbb{R}}$ sono misure di Borel.

1. $\mu(F) := \sup F - \inf F$. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
2. $\mu(F) = 0$ se F è numerabile, $+\infty$ altrimenti. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
3. $\mu(F) = 0$ se $x \in F$, $\mu(F) = 1$ altrimenti. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
4. $\mu(F) = \int_F e^x \, dx$. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

Esercizio 2 Per ogni $f \in L^1(\mathbb{R})$ si ha:

1. $f_n(x) := f(x)e^{-|x-n|^2} \to 0$ in $L^1(\mathbb{R})$. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
2. $f_n(x) := f(x+n) \to 0$ in $L^1(\mathbb{R})$. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
3. $f_n(x) := f(x+1/n)$ converge a $f(x)$ in $L^1(\mathbb{R})$. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
4. $g_n(x) := \min\{|f(x)|, 1/n\} \to 0$ in $L^1(\mathbb{R})$. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

Esercizio 3 Per ogni $f_n \to 0$ in $L^1(\mathbb{R}^2)$ si ha:

1. $f_n \to 0$ q.o. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
2. Esiste una sottosuccessione f_{n_h} convergente a zero quasi ovunque. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
3. Detto $E_n := \{x \in \mathbb{R} : f_n(x) \geq 1\}$ si ha $\lambda(E_n) \to 0$. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
4. $f_n \to 0$ uniformemente su $\mathbb{R}^2$. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

Esercizio 4 Calcolare $f(x) := \mathbf{1}_{[-1,1]} * \mathbf{1}_{[-5,5]}(x)$ e $g(x) := \mathbf{1}_{[0,1]} * \mathbf{1}_{[-5,5]}(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
Risposta:

Esercizio 5 Determinare per quali $p \in [1, +\infty]$ si ha che la successione $f_n(x) := \frac{\sin(x)^n}{x}$ converge a zero in $L^p(\mathbb{R})$.
Risposta: