

IAS, Esercizi 2

Nome:

Cognome:

Matricola:

Regole: Voto minimo di ogni esercizio = 0. Esercizi 1–3: risposta giusta = +1, risposta non data = 0, risposta sbagliata = -1. Esercizi 4–6: punti 0–6.

Esercizio 1 Siano $f_n, f \in L^3(\mathbb{R}^2)$.

- | | | |
|--|----------------------------|----------------------------|
| 1. Se $f_n \rightharpoonup f$ allora f_n è limitata in $L^3(\mathbb{R}^2)$. | ☐ V | ☐ F |
| 2. Se $f_n \rightharpoonup f$ in $L^3(\mathbb{R}^2)$ e $g_n \rightarrow g$ in $L^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^2)$ allora $\int f_n g_n dx \rightarrow \int f g dx$. | ☐ V | ☐ F |
| 3. Se $f_n \rightharpoonup f$ in $L^3(\mathbb{R}^2)$ e $g_n \rightharpoonup g$ in $L^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^2)$ allora $\int f_n g_n dx \rightarrow \int f g dx$. | ☐ V | ☐ F |
| 4. Se $f_n \rightarrow f$ q.o., allora $f_n \rightharpoonup f$. | ☐ V | ☐ F |

Esercizio 2 per ogni successione $\{f_n\} \subset L^2(\mathbb{R}^2)$ tale che $f_n \rightharpoonup f$ in $L^2(\mathbb{R}^2)$ si ha:

- | | | |
|---|----------------------------|----------------------------|
| 1. $f_n \mathbf{1}_{B_n(0)} \rightharpoonup f$. | ☐ V | ☐ F |
| 2. $f_n(1 - \mathbf{1}_{B_n(0)}) \rightharpoonup 0$. | ☐ V | ☐ F |
| 3. $ f_n \rightharpoonup f $. | ☐ V | ☐ F |
| 4. $3f_n + f \rightharpoonup 4f$. | | |

Esercizio 3 Sia ρ_n una successione di mollificatori standard in $\mathbb{R}^3$ (ossia $\rho_n := \tilde{\rho}_{\varepsilon_n}$ con $\varepsilon_n \rightarrow 0$ e $\tilde{\rho}_{\varepsilon_n}$ mollificatori standard).

- | | | |
|--|----------------------------|----------------------------|
| 1. ρ_n converge debolmente in $L^1(\mathbb{R}^3)$. | ☐ V | ☐ F |
| 2. $\{\rho_n\}$ è limitata in $L^2(\mathbb{R}^3)$. | ☐ V | ☐ F |
| 3. $\{\rho_n\}$ è limitata in $L^1(\mathbb{R}^3)$. | ☐ V | ☐ F |
| 4. $\rho_n \rightharpoonup 0$ in $L^2(\mathbb{R}^3)$. | ☐ V | ☐ F |

Esercizio 4 Dimostrare che le funzioni $f_n, g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definite da $f_n(x) := \frac{1_{[0,n]}}{n}$ e $g_n(x) := 1_{[0,1]}(x - n)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, non convergono debolmente in $L^1(\mathbb{R})$.¹

Risposta:

Esercizio 5 Siano $p \in (1, \infty)$, $f_n, f \in L^p(0, 1)$.

(a) Dimostrare che $f_n \rightharpoonup f$ in $L^p(0, 1)$ se e solo se $\sup_n \|f_n\|_{L^p} < \infty$ e per ogni $x \in (0, 1)$ ²

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^x f_n(y) dy = \int_0^x f(y) dy.$$

(b) Tale equivalenza continua a sussistere eliminando l'ipotesi $\sup_n \|f_n\|_{L^p} < \infty$? ³

Risposta:

¹Si suggerisce di dimostrare prima che l'unico candidato limite è la funzione nulla.

²È utile ricordare che le funzioni semplici sono dense in L^p .

³Si suggerisce di provare a costruire controesempi con funzioni rapidamente oscillanti e non equi-limitate in L^∞ .