IAS, Esercizi 3

Nome: *Cognome:* *Matricola:*

Regole: Voto minimo di ogni esercizio = 0. Esercizi 1–3: risposta giusta = +1, risposta non data = 0, risposta sbagliata = −1. Esercizi 4–5: punti 0–9.

Esercizio 1 Per ogni $f \in L^2(\mathbb{R})$ si ha:

1. La successione $f_n = f(nx)^2$ tende debolmente a 0 in $L^2(0,1)$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
2. La successione $f_n = f(nx)^2$ tende debolmente a una costante in $L^1(0,1)$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
3. La successione $f_n = f(nx)$ tende debolmente a una costante in $L^2(0,1)$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
4. La successione $f_n = n^{-1}f(nx)$ tende a 0 in $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
5. La successione $f_n = n^{-1}f(nx)$ tende a 0 in $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
6. La successione $f_n = f(nx)$ tende a una costante in $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

Esercizio 2 Per ogni $f \in C_c(\mathbb{R})$ si ha:

1. $f_n(x) := f(nx) \rightharpoonup 0$ in $L^1(\mathbb{R})$. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
2. $f_n(x) := f(\frac{x}{n}) \rightharpoonup 0$ in $L^1(\mathbb{R})$. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
3. $f_n(x) := f(-x+n^3) \rightharpoonup 0$ in $L^1(\mathbb{R})$. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
4. $f_n(x) := f(x+\frac{1}{e^n}) \rightharpoonup 0$ in $L^1(\mathbb{R})$. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
5. $f_n(x) := \sum_{k=1}^n f(x-k)$ è limitata in $L^1(\mathbb{R})$. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
6. $f_n(x) := \frac{1}{n}f(nx) \rightharpoonup 0$ in $L^1(\mathbb{R})$. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

Esercizio 3 Sia $u \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ arbitraria. Allora;

1. La successione $u_n(x) = u(x-n)$ converge in $\mathscr{D}$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
2. La successione $u_n(x) = u(x-n)$ converge in $\mathscr{D}'$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
3. La successione $u_n(x) = n^{-2}u(x/n)$ converge in $\mathscr{D}'$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
4. La successione $u_n(x) = n^{-2}u(x/n)$ converge in $\mathscr{D}$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
5. La successione $u_n(x) = n^{-1}u(x+\frac{1}{n})$ converge in $\mathscr{D}$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
6. La successione $u_n(x) = n^{-1}u(x+\frac{1}{n})$ converge in $\mathscr{D}'$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

Esercizio 4 Determinare quali delle seguenti applicazioni da $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ in $\mathbb{C}$ sono distribuzioni:

$T(\phi) = \phi(0)+\phi(1)+\phi(2)$ $\qquad$ $T(\phi) = \phi(0)\phi(1)$ $\qquad$ $T(\phi) = \int_0^1 \phi(t)dt$ $\qquad$ $T(\phi) = \lim_{t\to 0} \frac{\phi(t)-\phi(-t)}{t}$

$T(\phi) = \int_0^1 \phi(t^2)dt$ $\qquad$ $T(\phi) = \lim_{k\to+\infty} \int_k^{2k} \phi(t)dt$ $\qquad$ $T(\phi) = \lim_{k\to+\infty} \int_0^{1+1/k} \phi(t)^2 dt$

Risposta:

Esercizio 5 Sia ρ una funzione test pari su $\mathbb{R}$ il cui supporto è contenuto in $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, e siano $f(x) = x$, $g(x) = \sin(x[|x|])$ dove $[t]$ denota la parte intera di t. Determinare

$$\rho * f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \lim_{n\to+\infty} (\rho * g)(n + \frac{1}{2}).$$

Risposta: