

IAS, Esercizi 4

Nome:

Cognome:

Matricola:

Regole: Voto minimo di ogni esercizio = 0. Esercizi 1–3: risposta giusta = +1, risposta non data = 0, risposta sbagliata = -1. Esercizi 4–5: punti 0–9.

Esercizio 1 Sia $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$.

- | | | |
|---|----------------------------|----------------------------|
| 1. Se $x_n \rightarrow 0$ in $\mathbb{R}^N$, allora $\varphi_n(\cdot) := \varphi(\cdot - x_n) \rightarrow \varphi(\cdot)$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. | ☐ V | ☐ F |
| 2. Se $ x_n \rightarrow +\infty$ in $\mathbb{R}^N$, allora $\varphi_n(\cdot) := \varphi_n(\cdot - x_n) \rightarrow 0$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. | ☐ V | ☐ F |
| 3. Se $c_n \rightarrow c$ in $\mathbb{R}$, allora $\varphi_n := c_n \varphi \rightarrow c \varphi$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. | ☐ V | ☐ F |
| 4. $\varphi_n(\cdot) := \frac{\varphi(n \cdot)}{n} \rightarrow 0$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. | ☐ V | ☐ F |

Esercizio 2 Siano $\{f_n\} \subset L^3(\mathbb{R}^2)$, $f \in L^3(\mathbb{R}^2)$.

- | | | |
|---|----------------------------|----------------------------|
| 1. Se $f_n \rightharpoonup f$ in $L^3(\mathbb{R}^2)$, allora $T_{f_n} \rightarrow T_f$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$. | ☐ V | ☐ F |
| 2. Se $f_n \rightarrow f$ in $L^3(\mathbb{R}^2)$, allora $T_{f_n} \rightarrow T_f$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$. | ☐ V | ☐ F |
| 3. Se $T_{f_n} \rightarrow T_f$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$, allora $f_n \rightharpoonup f$ in $L^3(\mathbb{R}^2)$. | ☐ V | ☐ F |
| 4. Se $\ f_n\ _\infty \rightarrow +\infty$, allora T_{f_n} non converge in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$. | ☐ V | ☐ F |

Esercizio 3 Sia $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) := 4|x - 5|$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

- | | | |
|---------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| 1. Allora $T'_f = 4\delta_5$. | ☐ V | ☐ F |
| 2. Allora $T''_f = 8\delta_5$. | ☐ V | ☐ F |
| 3. Allora $T''_f = 5\delta_4$. | ☐ V | ☐ F |
| 4. Allora $T'''_f = T_0$. | ☐ V | ☐ F |

Esercizio 4 Determinare se le seguenti applicazioni $T_i : C_c^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ sono distribuzioni, e in caso affermativo se si possono rappresentare tramite funzioni in $L_{loc}^1(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} \langle T_1, \varphi \rangle &:= \int_0^6 \varphi(x) dx, & \langle T_2, \varphi \rangle &:= \langle T_1', \varphi \rangle \\ \langle T_3, \varphi \rangle &:= \varphi(1) - \varphi(0) & \langle T_4, \varphi \rangle &:= \int_{\mathbb{R}} \varphi^2(x) dx \\ \langle T_5, \varphi \rangle &:= \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx \right)^2 & \langle T_6, \varphi \rangle &:= \lim_{h \rightarrow +\infty} \varphi(h)^2. \end{aligned}$$

Risposta:

Esercizio 5 Determinare tutte le funzioni $f : (-1, 1)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ della forma $f(x, y) = g(x)h(y)$ con $g, h \in L^1((-1, 1))$ tali che, per ogni $\varphi \in C_c^\infty((-1, 1))$,

$$\int_{-1}^1 g(x)\varphi'(x) dx = \int_{-1}^1 \varphi(x), \quad \int_{-1}^1 h(y)\varphi''(y) dy = 0, \quad \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y) dx dy = 1.$$

Risposta: