IAS, Esercizi 5

Nome: *Cognome:* *Matricola:*

Regole: Voto minimo di ogni esercizio = 0. Esercizi 1–3: risposta giusta = +1, risposta non data = 0, risposta sbagliata = −1. Esercizi 4–5: punti 0–9.

Esercizio 1 Per ogni $f \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)$ si ha:

1. $f \in W^{1,1}(\mathbb{R}^2)$. V F
2. $f \in W^{1,2}(B(0,1))$. V F
3. Se $|f(x)| \leq |x|^{-1}$ per ogni $x \in \mathbb{R}^2$, allora $f \in L^5(\mathbb{R}^2)$. V F
4. $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$. V F

Esercizio 2 Per ogni $f \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ si ha:

1. $f \in W_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)$. V F
2. Se $n = 2$ esiste $R > 0$: $|f(x)| \leq 1$ per q.o. $x \in \mathbb{R}^2 \setminus B_1(0)$. V F
3. $f \in W_0^{1,2}(B(0,1))$. V F
4. $f \in W^{2,1}(\mathbb{R}^n)$. V F

Esercizio 3 Per ogni $f_n \rightharpoonup 0$ in $W^{1,2}(\mathbb{R}^2)$ si ha:

1. Le funzioni f_n sono periodiche. V F
2. $f_n \to 0$ uniformemente. V F
3. $\frac{\partial f_n}{\partial x} + \frac{\partial f_n}{\partial y} \rightharpoonup 0$ in $L^2(\mathbb{R}^2)$. V F
4. Se $f_n \to 0$ uniformemente, allora $\|\nabla f_n\|_{L^2} \to 0$. V F

Esercizio 4 Sia $B \subset \mathbb{R}^2$ la palla unitaria aperta, e sia $f(x,y) := 1 + x^2 + y^2$ se $x > 0$, $f(x,y) := a(y-1)^2 + b(y+x^2)$ se $x < 0$ (con a, $b \in \mathbb{R}$). Sapendo che $f \in W^{1,1}(B)$ calcolare

$$\int_B f(x,y)\,dx\,dy.$$

Risposta:

Esercizio 5 Sia $f \in W^{1,2}(\mathbb{R}^2)$, f_r la restrizione di f alla palla di raggio r, g_r la traccia di f_r, e $h_r : \partial B_1 \to \mathbb{R}$ definito da $h_r(x) := g_r(rx)$. Dimostrare che il limite per $r \to +\infty$ di h_r in $L^2(\partial B_1)$ è zero.
Risposta: