

## IAS, Esercizi 6

Nome:

Cognome:

Matricola:

**Regole:** Voto minimo di ogni esercizio = 0. Esercizi 1–3: risposta giusta = +1, risposta non data = 0, risposta sbagliata = -1. Esercizi 4–5: punti 0–9.

**Esercizio 1** Per ogni  $f \in W^{1,3}(\mathbb{R}^2)$  si ha:

- |   |                            |                            |
|---|----------------------------|----------------------------|
| 1. Esiste $L > 0$ tale che $ f(x) - f(y)  \leq L x - y $ per ogni $x, y \in \mathbb{R}^2$ . | <input type="checkbox"/> V | <input type="checkbox"/> F |
| 2. $\nabla f \in L^3(\mathbb{R}^2)$ .   | <input type="checkbox"/> V | <input type="checkbox"/> F |
| 3. $\nabla f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ .   | <input type="checkbox"/> V | <input type="checkbox"/> F |
| 4. Se $ f  \leq 1$ , allora $f \in L^4(\mathbb{R}^2)$ .                                     | <input type="checkbox"/> V | <input type="checkbox"/> F |
| 5. $f \in W_0^{1,3}(\mathbb{R}^2)$ .  | <input type="checkbox"/> V | <input type="checkbox"/> F |
| 6. $f^3 \in W^{1,1}(\mathbb{R}^2)$ .  | <input type="checkbox"/> V | <input type="checkbox"/> F |

**Esercizio 2** Per ogni  $f_k \rightarrow 0$  in  $W^{1,2}(\mathbb{R}^3)$  si ha:

- |  |                            |                            |
|--|----------------------------|----------------------------|
| 1. Le funzioni $f_k$ sono continue.                              | <input type="checkbox"/> V | <input type="checkbox"/> F |
| 2. $\ \nabla f_k\ _{L^2} \rightarrow 0$ .                        | <input type="checkbox"/> V | <input type="checkbox"/> F |
| 3. $f_k \rightarrow 0$ in $L^1(\mathbb{R}^2)$ .                  | <input type="checkbox"/> V | <input type="checkbox"/> F |
| 4. $f_k \rightarrow 0$ in $L^1(B_1(0))$ .                        | <input type="checkbox"/> V | <input type="checkbox"/> F |
| 5. $f_k \rightarrow 0$ in $L^1(\mathbb{R}^2 \setminus B_1(0))$ . | <input type="checkbox"/> V | <input type="checkbox"/> F |
| 6. Le funzioni $f_k$ sono periodiche.                            | <input type="checkbox"/> V | <input type="checkbox"/> F |

**Esercizio 3** Sia  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definita come  $f(x, y) = (1 + 2x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}$ .

- (i) Per quali  $p \in [1, \infty]$  si ha  $f \in W^{1,p}(B_1(0))$ ?
- (ii) Per quali  $p \in [1, \infty]$  si ha  $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^2 \setminus B_1(0))$ ?
- (iii) Per quali  $p \in [1, \infty]$  si ha  $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$ ?

**Risposta:**

**Esercizio 4** Sia  $f_k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $f_k(x, y) = \min\{1, k|x|\}$ .

- (i) Per quali valori di  $p \in [1, \infty]$  si ha  $f_k \in W^{1,p}(B_1(0))$ ?
- (ii) Per quali valori di  $p \in [1, \infty]$  si ha  $f_k \rightarrow 1$  in  $W^{1,p}(B_1(0))$ ?
- (iii) Per quali valori di  $p \in [1, \infty]$  si ha  $f_k \rightharpoonup 1$  (o  $\overset{*}{\rightharpoonup} 0$ ) in  $W^{1,p}(B_1(0))$ ?

**Risposta:**