

IAS, Esercizi 7

Nome:

Cognome:

Matricola:

Regole: Voto minimo di ogni esercizio = 0. Esercizi 1–3: risposta giusta = +1, risposta non data = 0, risposta sbagliata = -1. Esercizi 4–5: punti 0–9.

Esercizio 1 Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- | | | |
|--|----------------------------|----------------------------|
| 1. La funzione $u(x) = \exp(x - x^2)$ appartiene a $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. | ☐ V | ☐ F |
| 2. Se $u(x) = (1 + x ^2)^{-5}$, $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, allora $\hat{u} \in C^8$. | ☐ V | ☐ F |
| 3. La funzione $e^{-\sqrt{1+x^2}}$ appartiene a $\mathcal{S}$. | ☐ V | ☐ F |
| 4. La funzione $u(x) = \exp(-x^3)$ appartiene a $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. | ☐ V | ☐ F |

Esercizio 2 Sia $u(x)$ una qualunque funzione di $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

- | | | |
|--|----------------------------|----------------------------|
| 1. Allora la successione $u_n(x) = u(x - n)$ converge a 0 in $\mathcal{S}$. | ☐ V | ☐ F |
| 2. Allora la funzione $u(x)$ appartiene a $L^3(\mathbb{R})$. | ☐ V | ☐ F |
| 3. Allora $\sum_{n \geq 1} u(n)$ è una serie convergente. | ☐ V | ☐ F |
| 4. Allora la successione $u_n(x) = u(\frac{x}{n})$ converge a 0 in $\mathcal{S}$. | ☐ V | ☐ F |

Esercizio 3 Sia u una qualunque funzione di $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

- | | | |
|--|----------------------------|----------------------------|
| 1. Se $u''' + u' + u = 0$ per ogni x allora u è identicamente nulla. | ☐ V | ☐ F |
| 2. Se $u(x + 1) = u(x - 1)$ per ogni x allora u è identicamente nulla. | ☐ V | ☐ F |
| 3. Allora $\xi \cdot \hat{u}(\xi)$ è limitata su $\mathbb{R}$. | ☐ V | ☐ F |
| 4. Allora $e^x u(x)$ è limitata su $\mathbb{R}$. | ☐ V | ☐ F |

Esercizio 4 Calcolare la trasformata di Fourier delle seguenti funzioni $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, dopo aver controllato che appartengono a $L^1(\mathbb{R})$.

$$u(x) = \mathbf{1}_{[-1,1]}(x)$$

$$u(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$u(x) = e^{-|x|}$$

$$u(x) = \mathbf{1}_{[-1,1]}(x) \cdot x$$

Risposta:

Esercizio 5 Siano u, v due funzioni in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

(a) Supponiamo che $u * v$ sia identicamente nulla. È vero che allora una delle due funzioni deve essere identicamente nulla?

(b) Supponiamo che $u * u$ sia identicamente nulla. È vero che allora u deve essere identicamente nulla?

Risposta: