

IAS, Esercizi 8

Nome:

Cognome:

Matricola:

Regole: Voto minimo di ogni esercizio = 0. Esercizi 1–3: risposta giusta = +1, risposta non data = 0, risposta sbagliata = -1. Esercizi 4–5: punti 0–9.

Esercizio 1 Dire se i seguenti elementi di $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ sono distribuzioni temperate.

- | | | |
|--|----------------------------|----------------------------|
| 1. La δ_{x_0} di Dirac in $x_0 \in \mathbb{R}$ appartiene a $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. | ☐ V | ☐ F |
| 2. La distribuzione T_u dove $u(x) = e^{\sqrt{ x }}$ appartiene a $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. | ☐ V | ☐ F |
| 3. La distribuzione T_u dove $u(x) = e^{-\sqrt{ x }}$ appartiene a $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. | ☐ V | ☐ F |
| 4. Il prodotto $a(x)\delta_0$ dove $a(x) \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ appartiene a $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. | ☐ V | ☐ F |

Esercizio 2 Sia T una qualunque distribuzione temperata in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ e $\phi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

- | | | |
|---|----------------------------|----------------------------|
| 1. Il prodotto $e^{-x}T$ è ben definito | ☐ V | ☐ F |
| 2. La successione $T_n = \frac{1}{n}\tau_n T$ tende a 0 in $\mathcal{S}'$. | ☐ V | ☐ F |
| 3. La successione $T_n = \phi(x - n)T$ tende a 0 in $\mathcal{S}'$. | ☐ V | ☐ F |
| 4. La successione $T_n = x^n T$ tende a 0 in $\mathcal{S}'$. | ☐ V | ☐ F |

Esercizio 3 Sia $\{u_n\}$ una successione in $L^2(\mathbb{R})$.

- | | | |
|--|----------------------------|----------------------------|
| 1. Se $u_n \rightarrow u$ in L^2 allora $\widehat{u_n} \rightarrow \widehat{u}$ in L^2 . | ☐ V | ☐ F |
| 2. $\{\widehat{u_n}\}$ può essere limitata in L^2 anche se $\{u_n\}$ non è limitata in L^2 . | ☐ V | ☐ F |
| 3. Per ogni $v \in L^2(\mathbb{R})$ si ha $\int v \cdot \widehat{u_n} dx \rightarrow 0$. | ☐ V | ☐ F |
| 4. Se $u_n \rightarrow u$ in L^2 allora $T_{u_n} \rightarrow T_u$ in $\mathcal{S}'$. | ☐ V | ☐ F |

Esercizio 4 Verificare che i seguenti funzionali su $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ appartengono a $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ e calcolarne la trasformata di Fourier.

$$T = \delta_0 - \delta_1$$

$$T = \delta'_0 + \delta''_1$$

$$T'_u \text{ dove } u(x) = \mathbf{1}_{[0,1]}(x)$$

$$T''_u \text{ dove } u(x) = x^2 - 2x + 3$$

$$T_u \text{ dove } u(x) = (x^2 + 1)e^{2ix}$$

$$T_u \text{ dove } u(x) = \cos(3x + 2)$$

Risposta:

Esercizio 5 Siano $T \in \mathcal{S}'$ e $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$. Supponiamo che $\Delta T - T = T_f$.

- (a) Dimostrare che T è della forma $T = T_u$ per una certa $u \in L^2(\mathbb{R}^3)$.
- (b) Dimostrare che u appartiene a C_0 .
- (c) Dimostrare che se anche $T_1 \in \mathcal{S}'$ soddisfa $\Delta T_1 - T_1 = f$ allora $T_1 = T_u$.
- (d) Dimostrare che se $f \in \mathcal{S}$ allora anche $u \in \mathcal{S}$.

Risposta: