Esercizi di Istituzioni di Matematica

Derivate e studi di funzione.

Fare uno "studio di una funzione" $y = f(x)$ *significa:*
1. *determinare il dominio di definizione* D_f
2. *determinare l'intersezione con l'asse* y *e (se possibile)*
   – *le intersezioni con l'asse* x*, cioè dove* $f(x) = 0$
   – *gli intervalli in cui* $f(x) > 0$
   – *gli intervalli in cui* $f(x) < 0$
3. *calcolare i limiti al bordo del dominio* D_f *e gli asintoti orizzontali/verticali*
4. *calcolare la derivata prima* $f'(x)$ *e*
   – *gli intervalli in cui* $f'(x) > 0$*, cioè* f *crescente*
   – *gli intervalli in cui* $f(x) < 0$*, cioè* f *decrescente*
   – *dove* $f'(x) = 0$
   e stabilire quali sono i massimi/minimi della funzione (globali e locali) e i flessi
5. *calcolare la derivata seconda* $f''(x)$ *e*
   – *gli intervalli in cui* $f''(x) > 0$*, cioè in cui la funzione è convessa (concavità verso l'alto)*
   – *gli intervalli in cui* $f''(x) < 0$*, cioè in cui la funzione è concava (concavità verso il basso)*
6. *disegnare il grafico usando per l'asse* x *e per l'asse* y *unità di misura opportune*

Nota. Dopo aver disegnato il grafico, ri-verificare che il disegno è coerente con i limiti, gli intervalli di crescita e gli intervalli di convessità trovati.

Esercizio. Studiare le seguenti funzioni $f(x)$. Quindi, per ognuna di esse scrivere l'equazione cartesiana della retta r_1 tangente al grafico in $x = 1$ (se esiste) e disegnarla.

(i) $f(x) = \frac{1}{x+1}$	*(ii)* $f(x) = \frac{1}{x^2-x}$	*(iii)* $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$
(iv) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$	*(v)* $f(x) = \frac{2-x^2}{x^3}$	*(vi)* $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$
(vii) $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$	*(viii)* $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$	*(ix)* $f(x) = \frac{e^{x^2-3}}{e^{-x}}$
(x) $f(x) = x - 2^{-x}$	*(xi)* $f(x) = x2^{-x}$	*(xii)* $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

Nel caso (x) tralasciare lo studio degli zeri di $f(x)$.

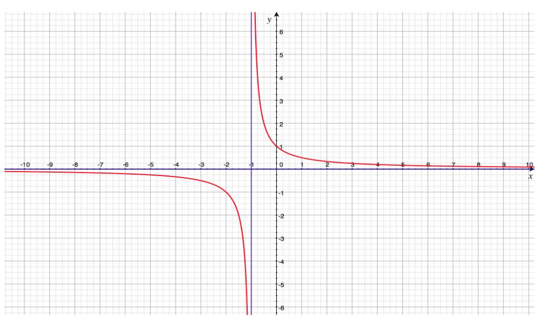
Suggerimento: è utile, per studiare il segno, gli intervalli di crescita e gli intervalli di convessità di f, fare della *tabelle dei segni* per f, f', f'' (tutte insieme, o separatamente).

Soluzioni

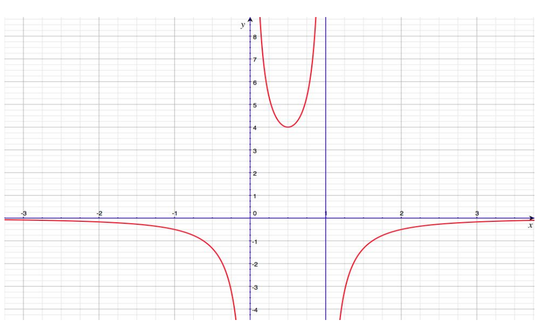
Per ognuna delle funzioni, diamo nell'ordine:

– dominio di definizione D_f
– intersezione con gli assi; intervalli in cui $f(x) > 0$
– valore dei limiti ai bordi da $-\infty$ a $+\infty$
– asintoti orizzontali/verticali
– derivata prima; intervalli in cui $f'(x) > 0$
– derivata seconda; intervalli in cui $f''(x) > 0$
– massimi/minimi globali e locali M, M_{loc}; m, m_{loc}
– flessi F_i nei punti x_i
– retta tangente r_1 in $x_0 = 1$ (se esiste)

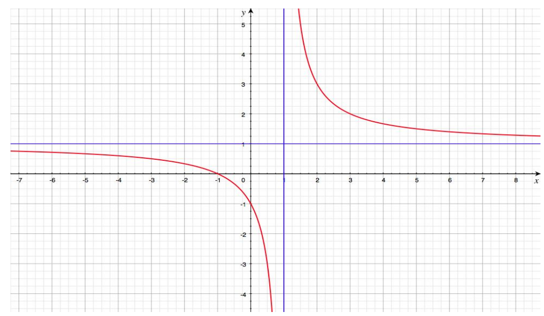
(i) $D_f = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$
$y = 1$; $(-1, +\infty)$
$0^-, (-\infty, +\infty), 0^+$
a.o. $y = 0$, a.v. $x = -1$
$f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}$; $\emptyset$
$f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3}$; $(-1, +\infty)$
$M = +\infty$; $m = -\infty$
$r_1 : y = \frac{1}{2}x$



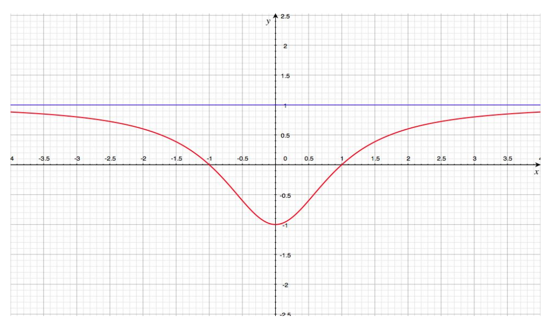
(ii) $D_f = \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$
$(0, 1)$
$0^-, (-\infty, +\infty), (+\infty, -\infty), 0^-$
a.o. $y = 0$, a.v. $x = 0$
$f'(x) = \frac{1-2x}{(x-x^2)^2}$; $(-\infty, \frac{1}{2})$
$f''(x) = \frac{-6x^2+6x-2}{(x-x^2)^3}$; $(0, 1)$
$M = +\infty$; $m = -\infty$, $m_{loc} = f(\frac{1}{2}) = 2$



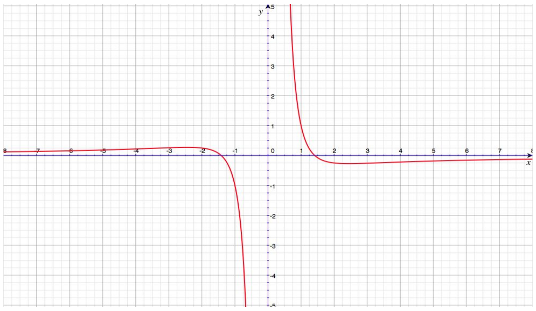
(iii) $D_f = \mathbf{R} \setminus \{1\}$
$y = -1$, $x = -1, 1$; $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
$1, (-\infty, +\infty), 1$
a.o. $y = 1$, a.v. $x = 1$
$f'(x) = -\frac{2}{(x-1)^2}$; $\emptyset$
$f''(x) = \frac{4}{(x-1)^3}$; $(1, +\infty)$
$M = +\infty$; $m = -\infty$



(iv) $D_f = \mathbf{R}$
$y = -1$, $x = -1, 1$; $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
$1, 1$
a.o. $y = 1$
$f'(x) = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$; $(0, +\infty)$
$f''(x) = \frac{-4(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}$; $(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$
$M = 1$; $m = f(0) = -1$
$F : x = \pm 1/\sqrt{3}$
$r_1 : y = x - 1$



(v) $D_f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$
$x = -\sqrt{2}, \sqrt{2}$; $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (0, \sqrt{2})$
$0^+, (-\infty, +\infty), 0^-$
a.o. $y = 0$, a.v. $x = 0$
$f'(x) = \frac{x^2-6}{x^4}$; $(-\infty, -\sqrt{6}) \cup (\sqrt{6}, +\infty)$
$f''(x) = \frac{24-2x^2}{x}$; $(-\infty, -\sqrt{12}) \cup (0, \sqrt{12})$
$M = +\infty$, $M_{loc} = f(-\sqrt{6}) = \frac{2}{3\sqrt{6}}$
$m = -\infty$, $m_{loc} = f(\sqrt{6}) = -\frac{2}{3\sqrt{6}}$
$F : x = \pm\sqrt{12}$
$r_1 : y = -5x + 6$



(vi) $D_f = \mathbf{R}$

$y = -1,\ x = 1;\ (1, +\infty)$

$0^-, 0^+$

a.o. $y = 0$

$f'(x) = \frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2};\ (1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$

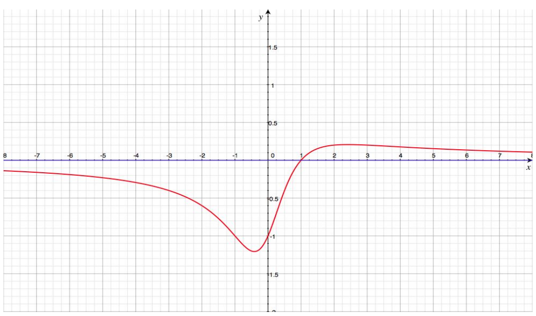
$f''(x) = \frac{2(x+1)(x^2-4x+1)}{(x^2+1)^3};\ (-1, 2-\sqrt{3}) \cup (2+\sqrt{3}, +\infty)$

$M = f(1+\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$

$m = f(1-\sqrt{2}) = -\frac{\sqrt{2}+1}{2}$

$F : x = 0, 2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}$

$r_1 : y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$



(vii) $D_f = \mathbf{R} \setminus \{1, 3\}$

$y = \frac{2}{3},\ x = 2;\ (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$

$1, \frac{1}{2}, (-\infty, +\infty), 1$

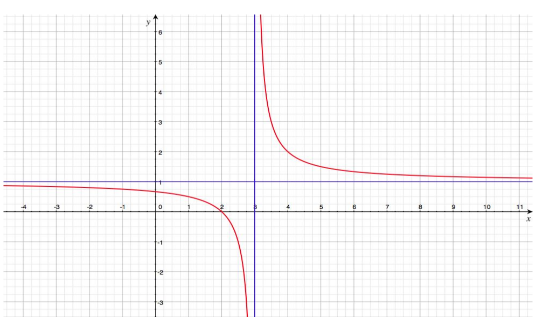
a.o. $y = 1$, a.v. $x = 3$

$f'(x) = \frac{1}{(x-3)^2};\ \emptyset$

$f''(x) = -\frac{2}{(x-3)^3};\ (3, +\infty)$

$M = +\infty;\ m = -\infty$

$r_1 : y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$



(viii) $D_f = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

$x = -1;\ (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

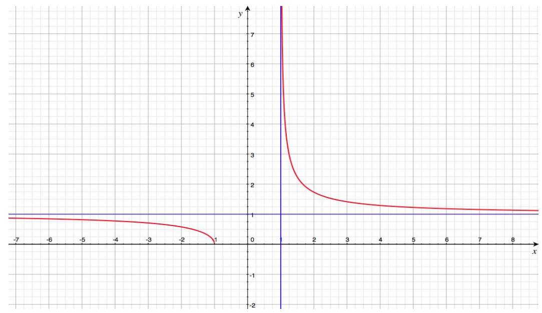
$1, 0^+, +\infty, 1$

a.o. $y = 1$, a.v. $x = 1$

$f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}};\ \emptyset$

$f''(x) = \frac{1}{(x-1)^3}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}};\ (1, +\infty)$

$M = +\infty;\ m = f(-1) = 0$



(ix) $D_f = \mathbf{R}$

$y = \frac{1}{e^3};\ \mathbf{R}$

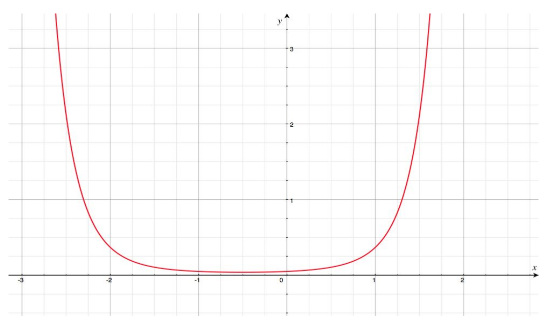
$+\infty, +\infty$

$f'(x) = (2x+1)e^{x^2+x-3};\ (-\frac{1}{2}, +\infty)$

$f''(x) = (4x^2+4x-3)e^{x^2+x-3};\ \mathbf{R}$

$M = +\infty;\ m = f(-\frac{1}{2}) = 1/\sqrt[4]{e^{13}}$

$r_1 : y = \frac{3}{e}x - \frac{2}{e}$



(x) $D_f = \mathbf{R}$

$y = -1,\ x_0 \in (0, 1);\ (x_0, +\infty)$

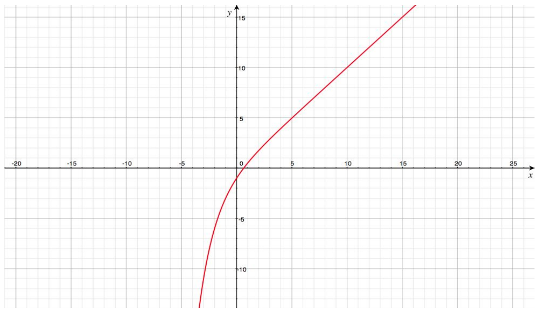
$-\infty, +\infty$

$f'(x) = 1 + 2^{-x}\ln 2;\ (-\frac{1}{2}, +\infty)$

$f''(x) = -2^{-x}(\ln 2)^2;\ \emptyset$

$M = +\infty;\ m = -\infty$

$r_1 : y = (1 + \frac{1}{2}\ln 2)x - \frac{1}{2}(1 + \ln 2)$



(xi) $D_f = \mathbf{R}$

$y = 0,\ x = 0;\ (0, +\infty)$

$-\infty, 0$

a.o. $y = 0$

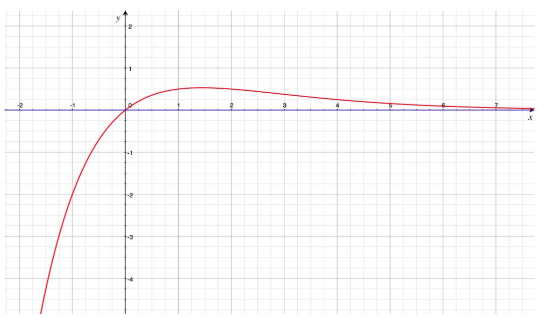
$f'(x) = 2^{-x}(1 - x\ln 2);\ (-\infty, \log_2 e)$

$f''(x) = 2^{-x}(x\ln 2 - 2)\ln 2;\ (2\log_2 e, +\infty)$

$M = f(\log_2 e) = \frac{\log_2 e}{e};\ m = -\infty$

$F : x = 2\log_2 e$

$r_1 : y = \frac{1}{2}(1 - \ln 2)x - \frac{1}{2}\ln 2$



(xii) $D_f = (0, 1) \cup (1, +\infty)$

$[y = 0, x = 0];\ (1, +\infty)$

$0, (-\infty, +\infty), +\infty$

a.v. $x = 1$

$f'(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x};\ (e, +\infty)$

$f''(x) = \frac{2 - \ln x}{x\ln^3 x};\ (1, e^2)$

$M = +\infty, [M_{loc} = f(0) = 0];\ m = -\infty,\ m_{loc} = f(e) = e$

$F : x = e^2$