Geometria, 2020-21. Ingegneria Aerospaziale, canale 2.
Prof. A. De Sole
Prova di esame 1 (autovalutazione) - durata: 3h

Esercizio 1. Siano u, v, w in $\mathbb{R}^3$ tre vettori e si considerino le seguenti due affermazioni:

(i) Tutte le possibili coppie (u, v), (u, w) e (v, w) sono linearmente indipendenti.

(ii) I tre vettori (u, v, w) sono linearmente indipendenti.

Per ciascuna delle implicazioni (i)$\Rightarrow$(ii) e (ii)$\Rightarrow$(i) dire se sono vere (fornendo una dimostrazione) o false (fornendo un controesempio).

Soluzione:
(ii)$\Rightarrow$(i): ovvio. (i)$\Rightarrow$(ii): falso. Ad esempio: in $\mathbb{R}^2$, i vettori $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$.

Esercizio 2. Al variare del parametro reale k, discutere l'esistenza di soluzioni del seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x - y - kz = 0 \\ x + z = k^2 - k + 1 \\ y - kz = 1 \end{cases}$$

Soluzione:
La matrice completa è:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -k & 0 \\ 1 & 0 & 1 & k^2 - k + 1 \\ 0 & 1 & -k & 1 \end{array}\right)$$

Con eliminazione di Gauss, scambiamo R_1 con R_2 e R_3:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & k^2 - k + 1 \\ 0 & 1 & -k & 1 \\ 1 & -1 & -k & 0 \end{array}\right)$$

e $R_3 \to R_3 - R_1 + R_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & k^2 - k + 1 \\ 0 & 1 & -k & 1 \\ 0 & 0 & -1 - 2k & k - k^2 \end{array}\right)$$

Se $k \neq -\frac{1}{2}$, la matrice dei coefficienti ha rango 3, quindi esiste un'unica soluzione. Se $k = -\frac{1}{2}$, poiché $k - k^2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = -\frac{3}{4} \neq 0$, la matrice completa ha rango 3 mentre la matrice dei coefficienti ha rango 2, quindi non esistono soluzioni.

Esercizio 3. Sia $V = \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ lo spazio dei polinomi di grado minore o uguale a 2. Al variare del parametro k, si consideri l'applicazione lineare $f : V \to V$ data da

$$f(p(t)) = p(t + 1) - kp(t) \ , \quad p(t) \in V$$

(a) Si determini una base di V e la matrice associata a f rispetto a tale base.

(b) Si determini il rango di f al variare di k.

(c) Sia $q(t) = t^2 + 1$. Dire se esistono polinomi $p(t) \in V$ tali che $f(p(t)) = q(t)$.

(d) Sia $k = 1$ e si consideri $g(t) = t + 1$. Sia $A \subset V$ il sottospazio affine dei polinomi $p(t) \in V$ tali che $f(p(t)) = g(t)$. Si dia una parametrizzazione di A.

Soluzione:
(a) Una base di V è $(1, t, t^2)$. Abbiamo $f(1) = 1-k$, $f(t) = t+1-kt = 1+(1-k)t$, $f(t^2) = (t+1)^2 - kt^2 = (1-k)t^2 + 2t + 1$. Quindi la matrice di f in tale base è:

$$A = \begin{pmatrix} 1-k & 1 & 1 \\ 0 & 1-k & 2 \\ 0 & 0 & 1-k \end{pmatrix}$$

(b) Il rango della matrice (ovvero di f) è 3 se $k \neq 1$ ed è 2 se $k = 1$.
(c) In termini matriciali, l'equazione $f(p(t)) = q(t)$ corrisponde al sistema non omogeneo, $AX = b$, con matrice completa

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1-k & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-k & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-k & 1 \end{array}\right)$$

Se $k \neq 1$, A ha rango 3 ed esiste un'unica soluzione, mentre per $k \neq 1$ A ha rango 2 e $(A|b)$ ha rango 3, dunque non esiste alcuna soluzione.
(d) In termini matriciali, l'equazione $f(p(t)) = g(t)$ corrisponde al sistema non omogeneo, $AX = b$, con matrice completa (stiamo ponendo $k = 1$)

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ovvero, portando alla forma ridotta:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Dunque il sistema è equivalente a $y = \frac{1}{2}$, $z = \frac{1}{2}$ (e $x \in \mathbb{R}$). Questo corrisponde alla parametrizzazione:

$$p(t) = k + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t^2\,,\ k \in \mathbb{R}$$

Esercizio 4. Per $k = 0, 1, 2, \ldots, 9$, sia $\mathcal{M}_k$ l'insieme delle matrici 3×3 che hanno k elementi uguali a 1 e $9 - k$ elementi uguali a 0. Determinare tutti i valori di k per cui $\det(A) = 0$ per ogni $A \in \mathcal{M}_k$.

Soluzione:
Per $k = 0, 1, 2$: VERO, poiché ogni $A \in \mathcal{M}_k$ ha rango al più 2. Per ciascun valore di $k = 3, \ldots, 7$: FALSO; e le seguenti matrici danno i controesempi cercati (cioè $A|\mathcal{M}_k$ e $\det(A) \neq 0$): per $k = 3$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; per $k = 4$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; per $k = 5$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; per $k = 6$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; per $k = 7$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Per $k = 8$ e 9: VERO, infatti ogni matrice in $\mathcal{M}_8$ o $\mathcal{M}_9$ ha due righe uguali a $(1, 1, 1)$.

Esercizio 5. Sia (e_1, e_2, e_3) la base standard di $\mathbb{R}^3$ e sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ definito dalle condizioni $f(e_1) = e_1 - e_2$, $f(e_2) = e_1 - e_2$, $f(e_3) = 2e_1 - 2e_2$.

(a) Determinare il polinomio caratteristico di f.

(b) Stabilire di f è diagonalizzabile oppure no.

(c) Determinare per quali valori del parametro reale k il vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ k \\ k+2 \end{pmatrix}$ appartiene all'immagine di f.

Soluzione:

(a) La matrice di f in base standard è: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Il polinomio caratteristico è:

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda Id) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 \\ -1 & -1-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda((1-\lambda)(-1-\lambda)+1) = -\lambda^3$$

(b) Poiché l'unico autovalore è 0 e $A \neq 0$, f non è diagonalizzabile.

(c) L'Immagine di f contiene i vettori della forma $\begin{pmatrix} x \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}$, per $x \in \mathbb{R}$. Il vettore in questione quindi appartiene all'immagine di f se e solo se $k = -2$.

Esercizio 6. (a) Determinare la matrice P della proiezione ortogonale sulla retta r (nel piano) di equazione $x - 3y = 0$.

(b) Determinare il simmetrico del punto $Q = (1, 1)$ rispetto a r.

Soluzione:

(a) Una base ortonormale della retta r è data dal vettore $u = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Quindi la proiezione ortogonale su r è data dalla formula

$$P(X) = \langle X|u\rangle u = \frac{1}{10}(3x+y) \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{10}x + \frac{3}{10}y \\ \frac{3}{10}x + \frac{1}{10}y \end{pmatrix}$$

La sua matrice è:

$$\begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

(b) Decomponiamo $Q = (Q - P(Q)) + P(Q)$, con $P(Q) \in r$ e $Q - P(Q) \in r^\perp$. Il simmetrico rispetto a r è quindi

$$-(Q - P(Q)) + P(Q) = 2P(Q) - Q = 2 \begin{pmatrix} \frac{9}{10} + \frac{3}{10} \\ \frac{3}{10} + \frac{1}{10} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$