Geometria, 2020-21. Ingegneria Aerospaziale, canale 2.
Prof. A. De Sole
Prova di esame 1 (autovalutazione) - durata: 3h

Esercizio 1. Siano u, v, w in $\mathbb{R}^3$ tre vettori e si considerino le seguenti due affermazioni:

(i) Tutte le possibili coppie (u, v), (u, w) e (v, w) sono linearmente indipendenti.

(ii) I tre vettori (u, v, w) sono linearmente indipendenti.

Per ciascuna delle implicazioni (i)⇒(ii) e (ii)⇒(i) dire se sono vere (fornendo una dimostrazione) o false (fornendo un controesempio).

Esercizio 2. Al variare del parametro reale k, discutere l'esistenza di soluzioni del seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x - y - kz = 0 \\ x + z = k^2 - k + 1 \\ y - kz = 1 \end{cases}$$

Esercizio 3. Sia $V = \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ lo spazio dei polinomi di grado minore o uguale a 2. Al variare del parametro k, si consideri l'applicazione lineare $f : V \to V$ data da

$$f(p(t)) = p(t+1) - kp(t) \ , \quad p(t) \in V$$

(a) Si determini una base di V e la matrice associata a f rispetto a tale base.

(b) Si determini il rango di f al variare di k.

(c) Sia $q(t) = t^2 + 1$. Dire se esistono polinomi $p(t) \in V$ tali che $f(p(t)) = q(t)$.

(d) Sia $k = 1$ e si consideri $g(t) = t + 1$. Sia $A \subset V$ il sottospazio affine dei polinomi $p(t) \in V$ tali che $f(p(t)) = g(t)$. Si dia una parametrizzazione di A.

Esercizio 4. Per $k = 0, 1, 2, \ldots, 9$, sia $\mathcal{M}_k$ l'insieme delle matrici 3×3 che hanno k elementi uguali a 1 e $9 - k$ elementi uguali a 0. Determinare tutti i valori di k per cui $\det(A) = 0$ per ogni $A \in \mathcal{M}_k$.

Esercizio 5. Sia (e_1, e_2, e_3) la base standard di $\mathbb{R}^3$ e sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ definito dalle condizioni $f(e_1) = e_1 - e_2$, $f(e_2) = e_1 - e_2$, $f(e_3) = 2e_1 - 2e_2$.

(a) Determinare il polinomio caratteristico di f.

(b) Stabilire di f è diagonalizzabile oppure no.

(c) Determinare per quali valori del parametro reale k il vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ k \\ k+2 \end{pmatrix}$ appartiene all'immagine di f.

Esercizio 6. (a) Determinare la matrice P della proiezione ortogonale sulla retta r (nel piano) di equazione $x - 3y = 0$.

(b) Determinare il simmetrico del punto $Q = (1, 1)$ rispetto a r.