Geometria, 2020-21. Ingegneria Aerospaziale, canale 2.
Prof. A. De Sole
Prova di esame 2 (autovalutazione) - durata: 3h

Esercizio 1. (a) Dire se esistono (fornendo un esempio) o non esistono (fornendo una dimostrazione) sottospazi vettoriali U e W di $\mathbb{R}^5$ tali che $\dim U = \dim W = 3$ e $\dim(U \cap W) = 1$.

(b) Dire se esistono (fornendo un esempio) o non esistono (fornendo una dimostrazione) sottospazi vettoriali U e W di $\mathbb{R}^5$ tali che $\dim U = \dim W = 3$ e $\dim(U \cap W) = 0$.

Soluzione:

(a) Esistono. Esempio: $U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$, $W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}, \ x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$.

(b) Non esistono. Dimostrazione: $5 \leq \dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W) = 3 + 3 - 0 = 6$, impossibile.

Esercizio 2. Sia A una matrice 4×6 di rango 4. Per ciascuna delle seguenti affermazioni dire se sono vere, fornendo una spiegazione, o false, fornendo un controesempio:

(i) Il sistema $AX = b$ a soluzione per ogni $b \in \mathbb{R}^4$.

(ii) L'applicazione lineare L_A è iniettiva.

(iii) La trasposta di A ha rango 6.

Soluzione:

(a) VERO. Poiché il rango di A è uguale al numero di righe (visto a lezione).

(b) FALSO. Poiché il rango di A NON è uguale al numero di colonne. Esempio: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Il vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ è nel nucleo di L_A, che dunque non è iniettiva.

(c) FALSO. A^t è una matrice 6×4 ed ha rango al massimo 4.

Esercizio 3. Si considerino in $\mathbb{R}^4$ il sottospazio $E \subset \mathbb{R}^4$ di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

ed il sottospazio $F \subset \mathbb{R}^4$ generato dai primi tre vettori della base standard di $\mathbb{R}^4$.

(a) Determinare una base di E ed una base di $E \cap F$.

(b) Determinare la dimensione di $E + F$.

(c) Dire, motivando la risposta, se esiste un endomorfismo f di $\mathbb{R}^4$ tale che $N(f) = E$ e $\operatorname{im}(f) = F$.

Soluzione:
(a) Dalla prima equazione di E abbiamo $x_1 = -2x_3$, dalla seconda equazione abbiamo $x_2 = -x_4$, e sostituendo nella terza equazione $0 = 0$. Dunque E ha dimensione 2, ed una base è data dai vettori $u_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Il sottospazio F è definito dall'equazione $x_4 = 0$, dunque $E \cap F$ ha dimensione 1 ed una sua base è data dal vettore u_1.
(b) $\dim(E + F) = \dim(E) + \dim(F) - \dim(E \cap F) = 2 + 3 - 1 = 4$, ovvero $E + F = \mathbb{R}^4$.
(c) In generale, $\dim(N(f)) + \dim(\Im(f)) = \dim(\mathbb{R}^4) = 4$. Se chiediamo $N(f) = E$ e $\Im(f) = F$, avremmo $2 + 3 = 4$, il che è impossibile.

Esercizio 4. Sia $W \subset \mathbb{R}^7$ il sottospazio di equazioni

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 0 \\ x_1 + \sqrt{2}x_2 + \sqrt{3}x_3 + \sqrt{4}x_4 + \sqrt{5}x_5 + \sqrt{6}x_6 + \sqrt{7}x_7 = 0 \end{cases}$$

e sia $f : W \to W$ l'endomorfismo dato da

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{7} - \sqrt{2} \\ 1 - \sqrt{7} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{2} - 1 \end{pmatrix} \quad \text{per} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} \in W\,.$$

Calcolare il determinante $\det(f)$.

Soluzione:
Questo esercizio non ha senso: f, così come è scritta, non è un'applicazione lineare. (Credo di aver copiato male l'esercizio...)

Esercizio 5. Sia A una matrice 2×2 invertibile, e si considerino i seguenti due endomorfismo F_A e G_A dello spazio $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$:

$$F_A(X) = AXA^{-1} \;\text{ e }\; G_A(X) = AX - XA\,.$$

Dimostrare che l'autospazio relativo all'autovalore 1 per l'applicazione F_A coincide con l'autospazio relativo all'autovalore 0 per l'applicazione G_A.

Soluzione:
L'autospazio relativo all'autovalore 1 per F_A è definito dall'equazione, per $X \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$,

$$F_A(X) = X \;\text{ ovvero }\; AXA^{-1} = X \;\text{ ovvero }\; AX = XA$$

L'autospazio relativo all'autovalore 0 per G_A è definito dall'equazione, per $X \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$,

$$G_A(X) = 0 \;\text{ ovvero }\; AAX - XA = 0 \;\text{ ovvero }\; AX = XA$$

Esercizio 6. Siano U e W i seguenti sottospazi dello spazio Euclideo $\mathbb{R}^4$.

$$U = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle|\, x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \right\}$$

(a) Determinare una base ed equazioni cartesiane di U.

(b) Determinare una base di $U^\perp$.

(c) Trovare una base di $U \cap W$.

(d) Trovare tutti i vettori di norma unitaria appartenenti a W e ortogonali a tutti i vettori di U.

Soluzione:

(a) I tre generatori di U non sono indipendenti: il terso è la differenza dei primi due. Quindi una base di U è data da $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Il generico elemento di U ha la forma

$$s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

per $s, t \in \mathbb{R}$. L'equazione precedente, corrisponde ad un sistema in s, t con matrice completa

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 2 & x_3 \\ 0 & -1 & x_4 \end{array}\right)$$

Con operazioni elementari per riga, otteniamo

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 2 & x_3 \\ 0 & -1 & x_4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 2 & x_3 \\ 1 & 1 & x_1 \\ 0 & -1 & x_4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & \frac{x_3}{2} \\ 1 & 1 & x_1 \\ 0 & -1 & x_4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & \frac{x_3}{2} \\ 0 & 0 & x_1 - x_2 - \frac{x_3}{2} \\ 0 & 0 & x_4 + \frac{x_3}{2} \end{array}\right)$$

Dunque equazioni Cartesiane per U sono

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - \frac{x_3}{2} = 0 \\ x_4 + \frac{x_3}{2} = 0 \end{cases}$$

(b) Una base di $U^\perp$ ̀data da (basta prendere i coefficienti delle due equazioni):

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Equazioni cartesiane per $U \cap W$ sono

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - \frac{x_3}{2} = 0 \\ x_4 + \frac{x_3}{2} = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione $x_3 = -2x_4$, e sostituendo

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

Sommando le due equazioni, $2x_1 + 4x_4 = 0$, ovvero $x_1 = -2x_4$, e sottraendo $2x_2 + 2x_4 = 0$, ovvero $x_2 = -x_4$. Dunque, $U \cap W$ è definito da $x_1 = -2x_4$, $x_2 = -x_4$, $x_3 = -2x_4$, ha quindi dimensione 1 ed una sua base è data da

$$w = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Cerchiamo i vettori di norma unitaria in $W \cap U^\perp$. Dalla base di U abbiamo (mettendo le entrate come coefficienti) equazioni cartesiane per $U^\perp$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Quindi, equazioni cartesiane per $W \cap U^\perp$ sono

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Dalla prima equazione $x_2 = -x_1$ e dalla quarta equazione $x_4 = x_3$. Sostituendo nella seconda: $0 = x_1 + 2x_3 - x_4 = x_1 + x_3$, ovvero $x_3 = -x_1$. Dunque, $W \cap U^\perp$ è definito dalle equazioni $x_2 = x_3 = x_4 = -x_1$, ha quindi dimensione 1 ed una sua base è

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

I vettori di norma 1 in W si ottengono normalizzando:

$$\pm\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$