Geometria, 2020-21. Ingegneria Aerospaziale, canale 2.
Prof. A. De Sole
Prova di esame 2 (autovalutazione) - durata: 3h

Esercizio 1. (a) Dire se esistono (fornendo un esempio) o non esistono (fornendo una dimostrazione) sottospazi vettoriali U e W di $\mathbb{R}^5$ tali che $\dim U = \dim W = 3$ e $\dim(U \cap W) = 1$.

(b) Dire se esistono (fornendo un esempio) o non esistono (fornendo una dimostrazione) sottospazi vettoriali U e W di $\mathbb{R}^5$ tali che $\dim U = \dim W = 3$ e $\dim(U \cap W) = 0$.

Esercizio 2. Sia A una matrice 4×6 di rango 4. Per ciascuna delle seguenti affermazioni dire se sono vere, fornendo una spiegazione, o false, fornendo un controesempio:

(i) Il sistema $AX = b$ a soluzione per ogni $b \in \mathbb{R}^4$.

(ii) L'applicazione lineare L_A è iniettiva.

(iii) La trasposta di A ha rango 6.

Esercizio 3. Si considerino in $\mathbb{R}^4$ il sottospazio $E \subset \mathbb{R}^4$ di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

ed il sottospazio $F \subset \mathbb{R}^4$ generato dai primi tre vettori della base standard di $\mathbb{R}^4$.

(a) Determinare una base di E ed una base di $E \cap F$.

(b) Determinare la dimensione di $E + F$.

(c) Dire, motivando la risposta, se esiste un endomorfismo f di $\mathbb{R}^4$ tale che $N(f) = E$ e $\mathrm{im}(f) = F$.

Esercizio 4. Sia $W \subset \mathbb{R}^7$ il sottospazio di equazioni

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 0 \\ x_1 + \sqrt{2}x_2 + \sqrt{3}x_3 + \sqrt{4}x_4 + \sqrt{5}x_5 + \sqrt{6}x_6 + \sqrt{7}x_7 = 0 \end{cases}$$

e sia $f : W \to W$ l'endomorfismo dato da

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{7} - \sqrt{2} \\ 1 - \sqrt{7} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{2} - 1 \end{pmatrix} \quad \text{per} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} \in W\,.$$

Calcolare il determinante $\det(f)$.

Esercizio 5. Sia A una matrice 2×2 invertibile, e si considerino i seguenti due endomorfismo F_A e G_A dello spazio $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$:

$$F_A(X) = AXA^{-1} \quad \text{e} \quad G_A(X) = AX - XA\,.$$

Dimostrare che l'autospazio relativo all'autovalore 1 per l'applicazione F_A coincide con l'autospazio relativo all'autovalore 0 per l'applicazione G_A.

Esercizio 6. Siano U e W i seguenti sottospazi dello spazio Euclideo $\mathbb{R}^4$.

$$U = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle|\, x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \right\}$$

(a) Determinare una base ed equazioni cartesiane di U.

(b) Determinare una base di $U^\perp$.

(c) Trovare una base di $U \cap W$.

(d) Trovare tutti i vettori di norma unitaria appartenenti a W e ortogonali a tutti i vettori di U.