Geometria - Ingegneria Aerospaziale

Prof. A. De Sole

Prova scritta del 19-1-2021

Nome e Cognome: ____________________

Numero di Matricola: ____________________

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	5	
2	5	
3	5	
4	5	
5	5	
6	5	
Totale	30	

Esercizio 1. Siano U e W sottospazi dello spazio vettoriale $\mathrm{Mat}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ delle matrici 2×3. Sapendo che $U + W = \mathrm{Mat}_{2\times 3}(\mathbb{R})$, $U \cap W$ ha dimensione 2 e W ha dimensione 3, calcolare la dimensione di U.

Soluzione:

Risposta:

$\dim(U) = \boxed{}$

Esercizio 2. Determinare una matrice $A \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tale che l'endomorfismo $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ soddisfi le seguenti proprietà:

(i) $\mathrm{Im}(L_A) \cap N(L_A) = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

(ii) A ha un autovalore $\lambda = 1$.

Soluzione:

Risposta:

$A = \boxed{}$

Esercizio 3. Sia (v_1, v_2, v_3, v_4) una base di uno spazio vettoriale V. Dato un parametro reale k, si consideri l'endomorfismo f di V tale che

$$f(v_1) = v_2\ ,\quad f(v_2) = kv_1 + v_3\ ,\quad f(v_3) = kv_1 + v_4\ ,\quad f(v_4) = 2v_1 + kv_2 + kv_3 + kv_4$$

(a) Determinare i valori di k per i quali f risulta iniettivo.

(b) Per i valori di k per cui f NON è iniettivo, determinare una base del nucleo di f.

(c) Per $k = 0$, stabilire se esiste una base di V rispetto alla quale la matrice associata a f risulta diagonale, se V è uno spazio vettoriale reale. (E se V è uno spazio vettoriale complesso?)

Soluzione:

Risposta:

(a) f iniettiva per k: $\boxed{}$ (b) Base di $N(f)$: $\boxed{}$ (c) Esiste? **Vera** / **Falsa**

Esercizio 4. Sia A la seguente matrice 7×7:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcolare il rango, la dimensione del nucleo, la traccia, il determinante ed il polinomio caratteristico di A.

Soluzione:

Risposta:

$\mathrm{rg}(A) = \boxed{}$, $\dim(N(A)) = \boxed{}$, $\mathrm{tr}(A) = \boxed{}$, $\det(A) = \boxed{}$, $p_A(\lambda) = \boxed{}$

Esercizio 5. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Al variare del parametro reale k, determinare gli autovalori di A e stabilire se è diagonalizzabile o no.

Soluzione:

Risposta:

Autovalori di A: $\boxed{}$ A è diagonalizzabile? **SI** / **NO** (cerchiare la risposta corretta).

Esercizio 6. Si consideri la retta $\ell = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \subset \mathbb{R}^3$ e sia $P_\ell : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la proiezione ortogonale su ℓ. Scrivere la matrice di P_ℓ nella base standard di $\mathbb{R}^3$.

Soluzione:

Risposta:

$P_\ell = \boxed{}$

Foglio per la brutta copia

Foglio per la brutta copia

Foglio per la brutta copia

Foglio per la brutta copia