

# Geometria 1, a. a. 2020-21

Corso di Laure in Ingegneria Aerospaziale

PROF. ALBERTO DE SOLE

## Diario settimanale delle lezioni

**Settimana 1.** [Lecture consigliate: Note di Maffei “Geometria dello Spazio I e II parte”. Note di Maffei “Spazi Vettoriale I parte”.]

- [28/9] Geometria del piano e dello spazio: somma e prodotto per scalari. Rette e segmenti. Punto medio e baricentro. Prodotto scalare. Distanze e angoli.
- [29/9] Equazioni di rette e piani usando il prodotto scalare. Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.
- [30/9] Applicazione alla risoluzioni di problemi classici sui triangoli: costruzione del baricentro; costruzione dell’ortocentro; baricentro, ortocentro e circocentro sono allineati.
- [31/9] Definizione di Spazio Vettoriale. Primi esempi.

**Settimana 2.** [Lettura consigliata: Note di Maffei “Spazi Vettoriale I parte”.]

- [5/10] Esempi di spazi vettoriali.
- [5/10] Prime proprietà degli spazi vettoriali.
- [6/10] Sottospazi vettoriali: definizione ed esempi.
- [7/10] Correzione degli esercizi della Settimana 1.
- [8/10] Base di uno spazio vettoriale e sistema di coordinate.
- [8/10] Esempi di base.

**Settimana 3.** [Lettura consigliata: Note di Maffei “Spazi Vettoriale II parte” e “Matrici”.]

- [12/10] Base, sistema di generatori e vettori linearmente indipendenti.
- [13/10] Matrici. Somma e prodotto di matrici. Traccia e trasposta di una matrice. Funzione  $L_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  associata ad una matrice  $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$ .
- [14/10] Correzione degli esercizi della Settimana 2.
- [15/10] Intersezione e somma di sottospazi. Proposizione:  $L_A$  è iniettiva se e solo se le colonne di  $A$  sono linearmente indipendenti in  $\mathbb{R}^m$ ;  $L_A$  è suriettiva se e solo se le colonne di  $A$  sono un sistema di generatori di  $\mathbb{R}^m$ ;  $L_A$  è biunivoca se e solo se le colonne di  $A$  sono una base di  $\mathbb{R}^m$ . Prodotto righe per colonne tra matrici.

**Settimana 4.** [Lettura consigliata: Note di Maffei “Matrici” e “Applicazioni lineari”.]

- [19/10] Prodotto di matrici e composizione di applicazioni lineari. Trasposta e traccia di un prodotto di matrici.
- [20/10] Definizione di applicazione lineare. Esempi.
- [21/10] Correzione degli esercizi della Settimana 3.
- [22/10] Applicazioni lineari  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  e matrici  $m \times n$ . Altri esempi di applicazioni lineari. Somma e composizione di applicazioni lineari.

**Settimana 5.** [Lettura consigliata: Note di Maffei “Applicazioni lineari”.]

- [26/10] Spazio vettoriale delle applicazioni lineari. Composizione di applicazioni lineari. Nucleo e immagine di un’applicazione lineare.
- [27/10] Matrice di un’applicazione lineare: definizione e metodo per calcolarla.
- [28/10] Correzione degli esercizi della Settimana 4.
- [29/10] Matrice del cambiamento di base. Esempi.

**Settimana 6.** [Lettura consigliata: Note di Maffei “Applicazioni lineari II parte” e “Sistemi lineari”.]

- [2/11] Composizione di applicazioni lineari e prodotto delle matrici corrispondenti. Formula del cambiamento di base per la matrice di un’applicazione lineare.
- [3/11] Sistemi di equazioni lineari. Matrici a scala ed eliminazione di Gauss.
- [4/11] Correzione degli esercizi della Settimana 5.
- [5/11] Esempi di sistemi di applicazioni lineari. Base dello spazio delle soluzioni di un sistema omogeneo. Rango di una matrice. Teorema di Rouchet-Capelli.

**Settimana 7.** [Lettura consigliata: Note di Maffei “Sistemi lineari” e “Il teorema fondamentale dell’algebra lineare”.]

- [9/11] Matrici invertibili. Calcolo della matrice inversa tramite eliminazione di Gauss.
- [10/11] Teorema: tutte le basi di uno spazio vettoriale  $V$  hanno lo stesso numero di elementi (la dimensione di  $V$ ). Applicazioni: un sistema linearmente indipendente si può estendere ad una base; da un sistema di generatori si può estrarre una base.
- [11/11] Correzione degli esercizi della Settimana 6.
- [12/11] Se  $U \subset V$ , allora  $\dim U \leq \dim V$ , e  $=$  vale se e solo se  $U = V$ . Formula della dimensione di Grassmann:  $\dim V = \dim N(F) + \dim \text{Im}(F)$ . Proposizione: data un’applicazione lineare  $F : V \rightarrow W$ , si possono scegliere basi  $\mathcal{B}$  di  $V$  e  $\mathcal{C}$  di  $W$  tali che  $[F]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$  sia diagonale con 1 e 0 sulla diagonale.

**Settimana 8.** [Lettura consigliata: Note di Maffei “Alcune conseguenze del Teorema Fondamentale”, “Descrizione di spazi e sottospazi” e “Determinante”.]

- [16/11] Formula di Grassmann:  $\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$ . Descrizione di un sottospazio tramite equazioni parametriche o tramite equazioni Cartesiane.
- [17/11] Esempio di descrizione di sottospazi. Definizione del determinante di una matrice.
- [18/11] Correzione degli esercizi della Settimana 7.
- [19/11] Determinante di matrici  $2 \times 2$  e  $3 \times 3$ . Sviluppi di Laplace per il calcolo del determinante.

**Settimana 9.** [Lettura consigliata: Note di Maffei “Determinante”.]

- [23/11] Eliminazione di Gauss per il calcolo del determinante. Teorema di Binet.
- [24/11] Fine della dimostrazione del Teorema di Binet. Determinante della matrice inversa. Determinante di un’endomorfismo  $F : V \rightarrow V$ . Teorema di Cramer. Formula di Cramer per la matrice inversa.
- [25/11] Correzione degli esercizi della Settimana 8.
- [26/11] Problema di diagonalizzazione di un endomorfismo e esempio di applicazione.

**Settimana 10.** [Lettura consigliata: Libro di Martelli, cap. 5 e 8.]

[30/11] Autovalori e autovettori. Polinomio caratteristico.

[1/12] Molteplicità algebrica e geometrica di un autovalore. Teorema di diagonalizzabilità.

[2/12] Correzione degli esercizi della Settimana 9.

[3/12] Dimostrazione del Teorema di diagonalizzabilità. Il prodotto scalare standard su  $\mathbb{R}^n$  e su  $\mathbb{C}^n$ . Forme bilineari, prodotti scalari, prodotti Euclidei.

**Settimana 11.** [Lettura consigliata: Libro di Martelli, cap. 8.]

[7/12] Forme bilineari, prodotti scalari, prodotti Euclidei. Disuguaglianza di Cauchy-Schwartz. Disuguaglianza triangolare.

[8/12] Algoritmo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt.

[9/12] Correzione degli esercizi della Settimana 10.

[10/12] Proiezione e riflessione ortogonale.

**Settimana 12.** [Lettura consigliata: Libro di Martelli, cap. 11.]

[14/12] Matrici ortogonali. Isometrie di uno spazio Euclideo. Matrice del cambiamento di base tra basi ortonormali.

[15/12] Somma diretta di sottospazi. Proiezione ortogonale su un sottospazio. Teorema Spettrale per endomorfismi autoaggiunti di uno spazio Euclideo.

[16/12] Lemma: una matrice simmetrica reale ha autovalori reali. Enunciato del Teorema di Jordan.

[17/12] Correzione degli esercizi della Settimana 11.

**Ultima Settimana.** [Lettura consigliata: xxx]

[21/12] Riepilogo generale e correzione esercizi.

[22/12] Correzione esercizi.