

Geometria 1 – Corso di laurea in Ingegneria Aerospaziale

ANNO ACCADEMICO 2020-21, I SEMESTRE

Esercizi settimanali

DOCENTE: ALBERTO DE SOLE

Settimana 1. Esercizi per il 7/10/2020:

- (1) Siano dati i punti $p = (1, 2, 3)$, $q = (0, 1, -2)$, $r = (-2, 1, 1)$. Calcolare:

$$p + 3q - r, \quad 3p - 2q + r.$$

- (2) Siano dati i punti $p = (1, 2, 3)$, $q = (0, 1, -2)$, $r = (-2, 1, 1)$, $s = (1, 1, 1)$. Calcolare il baricentro dei quattro punti.
- (3) Siano dati i punti $p = (2, 3)$, $q = (0, 1)$, $r = (-2, 1)$, $s = (1, 1)$. Calcolare l'intersezione tra le rette pq e rs .
- (4) Sia dato un quadrilatero convesso $abcd$ del piano. Si dimostri che esiste un punto comune ai segmenti congiungenti i punti medi dei lati opposti e al segmento congiungente i punti medi delle due diagonali. Di che punto si tratta?
- (5) Siano dati i punti $p = (1, 2, 3)$, $q = (0, 1, -2)$, $r = (-2, 1, 1)$. Calcolare la lunghezza dei lati, il perimetro e il coseno degli angoli del triangolo pqr .
- (6) Siano dati i punti $p = (1, 2, 3)$, $(3, 4, 5)$, $(7, 1, 0)$. Calcolare perimetro e area del triangolo pqr .
- (7) Dato un punto P esterno ad una circonferenza, si tratti una retta per P che interseca il cerchio e siano A e B i due punti di intersezione. Si dimostri che

$$\text{dist}(A, P) \cdot \text{dist}(B, P) = d^2 - r^2,$$

dove d è la distanza di P dal centro della circonferenza e r è il raggio della circonferenza.

- (8) Si completi la dimostrazione che $\mathbb{R}^n$ è uno spazio vettoriale, verificando tutti gli assiomi.
- (9) Dimostrare che $\mathcal{F}un(S, \mathbb{R})$, lo spazio delle funzioni $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, è uno spazio vettoriale, verificando tutti gli assiomi.
- (10) Si considerino i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$:
- (a) $U = \{(x, y) \mid 3x + 4y = 0\}$,
 - (b) $V = \{(x, y) \mid 3x + 4y = 1\}$,
 - (c) $W = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$,
 - (d) $X = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0\}$,
 - (e) $Y = \{(x, y) \mid x^2 + 4xy + 4y^2 = 0\}$.
- Quali sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^2$?
- (11) Si considerino i seguenti sottoinsiemi di $\mathcal{F}un(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$:
- (a) $U = \{f(x) \in \mathcal{F}un(\mathbb{Z}, \mathbb{R}) \mid f(1) = 0, f(2) = 0\}$,
 - (b) $V = \{f(x) \in \mathcal{F}un(\mathbb{Z}, \mathbb{R}) \mid f(1)f(2) = 0\}$,
 - (c) $W = \{f(x) \in \mathcal{F}un(\mathbb{Z}, \mathbb{R}) \mid f(-x) = f(x) \forall x \in \mathbb{Z}\}$,
 - (d) $X = \{f(x) \in \mathcal{F}un(\mathbb{Z}, \mathbb{R}) \mid f(x+1) = 2f(x) \forall x \in \mathbb{Z}\}$,
 - (e) $Y = \{f(x) \in \mathcal{F}un(\mathbb{Z}, \mathbb{R}) \mid f(x+1) = f(x) + 1 \forall x \in \mathbb{Z}\}$.
- Quali sono sottospazi vettoriali di $\mathcal{F}un(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$?
- (12) Si consideri l'insieme $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ con le seguenti operazioni di somma: $x +_V y = xy$, e di prodotto per scalari: $\lambda \cdot_V x = x^\lambda$. Dimostrare (verificando tutti gli assiomi) o disprovare (trovando un controesempio) la seguente affermazione: $(V, +_V, \cdot_V)$ è uno spazio vettoriale.

Settimana 2. Esercizi per il 14/10/2020:

- (1) Siano U e W due spazi vettoriali con operazioni di somma $+_U$ e $+_W$ e prodotto per scalari $\cdot_U$ e $\cdot_W$ rispettivamente. Si consideri l'insieme *prodotto cartesiano* $V = U \times W$, definito così:

$$U \times W = \{(u, w) \mid u \in U, w \in W\}.$$

Su V definisco somma $+_V$ e prodotto per gli scalari $\cdot_V$ nel seguente modo:

$$(u, w) +_V (\tilde{u}, \tilde{w}) = (u +_U \tilde{u}, w +_W \tilde{w}), \quad \lambda \cdot_V (u, w) = (\lambda \cdot_U u, \lambda \cdot_W w).$$

Dimostrare che il prodotto cartesiano V con queste operazioni di somma e prodotto per gli scalari è uno spazio vettoriale.

- (2) Per le seguenti affermazioni, dire se sono vere, fornendone una dimostrazione, o false, fornendo un controesempio:
- (a) Se U e W sono sottospazi vettoriali dello spazio vettoriale V , allora la loro intersezione $U \cap W$ è un sottospazio vettoriale.
 - (b) Se U e W sono sottospazi vettoriali dello spazio vettoriale V , allora la loro unione $U \cup W$ è un sottospazio vettoriale.
- (3) Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ si considerino le seguenti liste di vettori $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$:
- (i) $\mathcal{B} = (v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (1, 0, 0), v_3 = (0, 1, 0), v_4 = (0, 0, 1))$;
 - (ii) $\mathcal{B} = (v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (1, 1, 0))$;
 - (iii) $\mathcal{B} = (v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (1, 1, 0), v_3 = (1, -1, 0))$.

Per ognuna di queste liste stabilire se ognuna delle seguenti affermazioni sono vere (fornendo una dimostrazione) o false (fornendo un controesempio)

- a) Per ogni $v \in \mathbb{R}^3$ esistono dei numeri $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ tali che $v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$.
 - b) Dato $v \in \mathbb{R}^3$, la decomposizione di v nella forma $v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$ con $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ è al più unica.
 - c) $\mathcal{B}$ è una base.
- (4) Si consideri il sottospazio vettoriale $V \subset \mathbb{R}^3$ definito dall'equazione

$$x - y + 3z = 0.$$

Determinare una base di tale sottospazio. Scrivere le coordinate del vettore $(1, 4, 1)$ rispetto alla base scelta.

- (5) Nello spazio vettoriale $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ delle funzioni $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, si consideri il sottoinsieme dei polinomi di grado minore o uguale a 2:

$$\mathbb{R}[t]_{\leq 2} = \{f(t) = a + bt + ct^2 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}.$$

Verificare che $\mathbb{R}[t]_{\leq 2} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ è un sottospazio vettoriale. Si consideri la lista

$$\mathcal{B} = \left(f_1(t) = \frac{1}{2}(t-1)(t-2), f_2(t) = \frac{1}{2}t(t-1), f_3(t) = -t(t-2) \right).$$

Dimostrare che $\mathcal{B}$ è una base dello spazio vettoriale $\mathbb{R}[t]_{\leq 2}$. Scrivere le coordinate di $f(t) = t^2$ rispetto alla base $\mathcal{B}$. Scrivere le coordinate di un generico polinomio $f(t) = at^2 + bt + c$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.

- (6) Sia $S = \{a, b, c, d\}$ un insieme di quattro elementi e si consideri lo spazio vettoriale $\mathcal{F}(S, \mathbb{R})$ di tutte le funzioni $f : S \rightarrow \mathbb{R}$. Dato $s \in S$, si consideri la funzione $\delta_s : S \rightarrow \mathbb{R}$ definita nel seguente modo:

$$\delta_s(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = s \\ 0 & \text{se } x \neq s \end{cases}$$

Dimostrare che la lista di funzioni

$$\mathcal{B} = \{\delta_a, \delta_b, \delta_c, \delta_d\}$$

è una base di $\mathcal{F}(S, \mathbb{R})$. Si consideri la funzione $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$f(a) = 2, f(b) = 0, f(c) = \pi, f(d) = \sqrt{2}.$$

Determinare le coordinate della funzione f rispetto alla base $\mathcal{B}$.

- (7) Si consideri la seguente lista di vettori in $\mathbb{R}^4$ (scritti per colonna):

$$\mathcal{B} = \left(v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Verificare che $\mathcal{B}$ è una base di $\mathbb{R}^4$. Calcolare le coordinate di ciascuno dei seguenti vettori rispetto alla base $\mathcal{B}$:

$$(i) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (ii) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (iii) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (iv) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- (8) Siano $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ due rette parallele non coincidenti del piano. Siano P e Q due punti distinti in $\mathcal{R}$. Sia V un punto non in $\mathcal{R}$ e siano A e B le intersezioni delle rette VP e VQ con la retta $\mathcal{S}$. Sia C l'intersezione delle rette PB e QA e sia M l'intersezione di $\mathcal{R}$ con la retta VC . Dimostrare che M è il punto medio di P e Q .

Settimana 3. Esercizi per il 21/10/2020:

- (1) Siano dati i punti $P = (1, 2, 3)$, $Q = (0, 1, -2)$ e $R = (-2, 1, 1)$. Calcolare la proiezione di R sulla retta PQ e la distanza di R da tale retta.
- (2) Sia Π il piano di equazione $x + y + z = 1$. Si calcoli la proiezione di $P = (1, 2, 3)$ su Π e la distanza di P da Π . Si calcoli inoltre il simmetrico di P rispetto al piano Π .
- (3) Sia Π il piano di equazione $ax + by + cz = d$. Si determini una formula per la distanza di un punto $P = (\alpha, \beta, \gamma)$ dal piano Π .
- (4) Sia r una retta passante per l'origine in $\mathbb{R}^3$ e sia Π il piano ortogonale a r e passante per l'origine. Determinare gli spazi vettoriali $r \cap \Pi$ e $r + \Pi$.
- (5) Siano U e W sottospazi dello spazio vettoriale V . Dimostrare che $U \cup W$ è un sottospazio di V se e solo se $U \subset W$ o $W \subset U$.
- (6) Sia V uno spazio vettoriale e siano $u, v \in V$ con $v \neq 0$. Dimostrare che u e v sono linearmente dipendenti se e solo se esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $u = \lambda v$.
- (7) Sia (v_1, v_2, v_3, v_4) una base dello spazio vettoriale V . Dimostrare che per ogni $v \in V$ la lista di vettori (v_1, v_2, v_3, v_4, v) è un sistema di generatori per V ma non è linearmente indipendente.
- (8) Sia (v_1, v_2, v_3, v_4) una base dello spazio vettoriale V e siano $U = \text{Span}\{v_1, v_2\}$ e $W = \text{Span}\{v_3, v_4\}$. Determinare $U \cap W$ e $U + W$.
- (9) Siano $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ dei vettori linearmente indipendenti e sia $v \in V$. Dimostrare che $v_1, v_2, \dots, v_n, v$ sono linearmente indipendenti se e solo se $v \notin \text{Span}\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$.
- (10) Siano date le seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -8 & -5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 8 & -1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Per ciascuna delle seguenti espressioni dire se hanno senso e, in tal caso, calcolarle:

- (i) $L_A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, (ii) $L_B \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; (iii) $L_D \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; (iv) $A \cdot A$; (v) $B \cdot C$; (vi) $A \cdot D$; (vii) $D \cdot A$; (viii) $A \cdot B - B \cdot A$; (ix) $B \cdot C - C \cdot B$; (x) $D \cdot E - E \cdot E + E$; (xi) A^{101} (cioè $A \cdot A \dots A$ 101 volte); (xii) $F \cdot E$; (xiii) $E \cdot F$.

Settimana 4. Esercizi per il 28/10/2020:

- (1) Sia V uno spazio vettoriale, e siano $u_1, \dots, u_m$ e $w_1, \dots, w_n$ elementi di V . Siano $U = \text{Span}\{u_1, \dots, u_m\}$ e $W = \text{Span}\{w_1, \dots, w_n\}$. Dimostrare che $U + W$ è generato da $u_1, \dots, u_m, w_1, \dots, w_n$.
- (2) Siano U e W sottospazi vettoriali di V . Siano $u_1, u_2 \in U$ linearmente indipendenti, e siano $w_1, w_2 \in W$ linearmente indipendenti.
 - (a) Dimostrare che se $U \cap W = \{0\}$, allora u_1, u_2, w_1, w_2 sono linearmente indipendenti.
 - (b) Far vedere con un controesempio che, se $U \cap W \neq \{0\}$, allora u_1, u_2, w_1, w_2 non sono necessariamente linearmente indipendenti.
- (3) Siano $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tali che $ad - bc \neq 0$. Si considerino le matrici $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e $B = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Verificare che $AB = BA = \mathbb{I}$ e dimostrare che se C è una matrice 2×2 tale che $AC = \mathbb{I}$, allora $C = B$.
- (4) Dimostrare che per qualunque matrice non nulla $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$, vale $\text{Tr}(AA^t) > 0$.
- (5) Si consideri la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Calcolare $\text{Tr}(A^{1001})$.

- (6) Dimostrare che l'insieme delle matrici $n \times n$ simmetriche (cioè tali che $A^t = A$) è un sottospazio vettoriale di $\text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$. Determinare una base di tale sottospazio nel caso $n = 2$.
- (7) Siano $F : \mathbb{R}[t] \rightarrow \mathbb{R}[t]$, $G : \mathbb{R}[t] \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $H : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}[t]$ definite nel modo seguente:

$$F(p(t)) = (t^2 - 5t)p(t), \quad G(p(t)) = \begin{pmatrix} p(1) \\ p(2) \\ p(7) \end{pmatrix}, \quad H \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x(t-1) + y(t-3) + z(t-7) + (t-8).$$
 - (a) Dire quali tra F, G, H sono applicazioni lineari.
 - (b) Dire quali tra F, G, H sono iniettive.
 - (c) Dire quali tra F, G, H sono suriettive.
 - (d) Determinare $G \circ H$ e $F \circ H$.
- (8) Sia $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da

$$F \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + y + z \\ 2x + y \\ x + z \\ x + y - z \end{pmatrix}$$

Determinare una matrice A tale che $F = L_A$. Dire quali tra i seguenti elementi sono nel nucleo di F (ovvero soluzioni di $F(v) = 0$):

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Dire quali tra i seguenti elementi sono nell'immagine di F :

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Settimana 5. Esercizi per il 4/11/2020:

- (1) Si consideri lo spazio $\text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ delle matrici $n \times n$, ed i sottospazi S_n e A_n rispettivamente delle matrici simmetriche e delle matrici antisimmetriche. Dimostrare che $S_n + A_n = \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$.
- (2) Una matrice $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ è *invertibile* se esiste una matrice $A^{-1} \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ tale che $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \mathbb{I}$. Dimostrare che se A è invertibile, allora A^t è invertibile e $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.
- (3) Siano A e B due matrici $n \times n$ invertibili. Dimostrare che $A \cdot B$ è invertibile, e $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$.
- (4) Sia $D : \mathbb{R}[t] \rightarrow \mathbb{R}[t]$ l'applicazione lineare di derivazione: $D(p(t)) = p'(t)$. Determinare il nucleo e l'immagine di D .
- (5) Sia $f : \mathbb{R}[t]_{\leq 3} \rightarrow \mathbb{R}[t]_{\leq 3}$ la funzione $f(p(t)) = p'(t) + p(t+1)$. Verificare che f è un'applicazione lineare e calcolare la matrice di f rispetto alla base standard di $\mathbb{R}[t]_{\leq 3}$.
- (6) Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ e si consideri la funzione $R_A : \text{Mat}_{2 \times 3}(\mathbb{R}) \rightarrow \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ data da $R_A(X) = X \cdot A$. Verificare che R_A è un'applicazione lineare e calcolarne la matrice associata alle basi standard degli spazi di partenza e di arrivo.
- (7) Sia $V \subset \mathbb{R}^3$ il piano di equazione $x + y - 2z = 0$ e sia $f : V \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'applicazione definita da $f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 3y \\ x - y \end{pmatrix}$, per ogni $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V$. Si scelga una base di V e si scriva la matrice associata a f rispetto a tale base in partenza ed alla base standard in arrivo.
- (8) Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare e siano $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$. Per ciascuna delle seguenti affermazioni, dire se si tratta di affermazioni vere, fornendone una dimostrazione, o false, fornendone un controesempio:
 - (a) se f è iniettiva e $v_1, v_2, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti in V , allora $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)$ sono linearmente indipendenti in W .
 - (b) se f è iniettiva e $v_1, v_2, \dots, v_n$ sono un sistema di generatori di V , allora $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)$ sono un sistema di generatori di W .
 - (c) se f è suriettiva e $v_1, v_2, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti in V , allora $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)$ sono linearmente indipendenti in W .
 - (d) se f è suriettiva e $v_1, v_2, \dots, v_n$ sono un sistema di generatori di V , allora $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)$ sono un sistema di generatori di W .
 - (e) se f è biunivoca e $v_1, v_2, \dots, v_n$ sono una base di V , allora $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)$ sono una base di W .
- (9) Si consideri la seguente matrice: $M = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.
 - (a) Si determini un vettore non nullo $v_1 \in \mathbb{R}^2$ tale che $M \cdot v_1 = 2v_1$.
 - (b) Si determini un vettore non nullo $v_2 \in \mathbb{R}^2$ tale che $M \cdot v_2 = 3v_2$.
 - (c) Verificare che (v_1, v_2) è una base di $\mathbb{R}^2$.
 - (d) Dato $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, calcolare $M^{100} \cdot X$.
 - (e) Determinare la matrice M^{100} .

Settimana 6. Esercizi per il 11/11/2020:

- (1) Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ definito dall'equazione $2x + z = 0$, sia E lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 e sia $T : W \rightarrow E$ l'applicazione lineare definita da

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x + 2z \end{pmatrix} \quad \text{per ogni} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in W.$$

Sia inoltre $S : \mathbb{R}^3 \rightarrow E$ l'applicazione lineare definita dalle seguenti due condizioni:

$$S(w) = T(w) \quad \text{per ogni} \quad w \in W \quad \text{e} \quad S \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) scegliere una base di W ed una base di E e scrivere la matrice associata a T rispetto a queste basi;
(b) scrivere la matrice associata a S rispetto alle basi standard di $\mathbb{R}^3$ ed E .
(2) Sia $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare che ha come matrice associata alla base standard di $\mathbb{R}^3$ la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- (a) Dire se esistono due basi $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3)$ di $\mathbb{R}^3$ tali che $[F]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ sia diagonale (ovvero con tutte entrate 0 fuori dalla diagonale principale).
(b) Sia $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ la base standard di $\mathbb{R}^3$. Dire se esiste una base $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ di $\mathbb{R}^3$ tale che $[F]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}$ sia diagonale.
(3) Si consideri il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} 2x_2 + 2x_3 + 6x_4 + x_5 = 7 \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 + 11x_4 = 4 \\ x_1 + 3x_3 + 4x_4 + x_5 = 4 \end{cases}$$

- (a) Scrivere la matrice dei coefficienti A e la matrice completa $\tilde{A}$ associate al sistema.
(b) Ridurre la matrice completa a scalini.
(c) Calcolare il rango di A e $\tilde{A}$.
(d) Descrivere l'insieme delle soluzioni del sistema.
(4) Si consideri il seguente sistema lineare al variare del parametro $c \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 6x_4 = 13 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 = c^2 + 4 \\ x_2 + 3x_3 + x_4 = c^2 \\ x_1 + 2x_3 + 3x_4 = 7 \end{cases}$$

- (a) Calcolare (al variare del parametro c) il rango della matrice dei coefficienti e della matrice completa.
(b) Per quali valori di c il sistema ammette soluzione? E quando ammette soluzioni, quante soluzioni ha?
(5) Si consideri la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Si determini una base di $N(L_A)$.

(6) Si considerino i seguenti vettori in $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Sia $W = \text{Span}\{v_1, v_2, v_3\}$. Si determini una base di W . Si descriva W tramite un'equazione. Dire quali tra i seguenti vettori appartengono a W :

$$w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3/2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Per i vettori w_i che appartengono a W , determinare le coordinate rispetto alla base scelta.

(7) Sia $V = \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 2. Al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ si consideri l'applicazione lineare $L_k : V \rightarrow V$ definita da

$$L_k(p(t)) = p(t+1) - kp(t)$$

per ogni polinomio $p(t) \in V$.

- (a) Si scelga una base di V e si determini la matrice associata a L_k rispetto a tale base.
- (b) Si determini il rango di L_k al variare di k .
- (c) Sia $f(t) = t^2 + 1$. Si determini al variare di k se esistono polinomi $p(t)$ tali che $L_k(p(t)) = f(t)$.

Settimana 7. Esercizi per l'18/11/2020:

(1) Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ definito dall'equazione $x + y + z = 0$ e sia V il sottospazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 3 che si annullano in 1:

$$V = \{p(t) \in \mathbb{R}[t]_{\leq 3} \mid p(1) = 0\}.$$

Sia $F : W \rightarrow V$ l'applicazione lineare definita da:

$$F \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x + 2yt + zt^2 + (x+z)t^3.$$

- (a) Si scelgano una base di W ed una base di V e si scriva la matrice di F in tali basi.
- (b) Sia $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}[t]_{\leq 3}$ l'applicazione lineare tale che

$$G \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 + t \quad \text{e} \quad G \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{se} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in W.$$

Determinare la matrice di G rispetto alle basi standard di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}[t]_{\leq 3}$.

- (2) Sia A una matrice $m \times n$. Si dimostri che esiste una matrice B $n \times m$ tale che $AB = \mathbb{I}_m$ se e solo se $\text{rg}(A) = m$.
- (3) Si calcoli l'inversa delle seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -5 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(4) Sia $U = \mathbb{R}u \subset \mathbb{R}^3$, dove $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, e sia $W \subset \mathbb{R}^3$ il piano definito dall'equazione

$3x - z = 0$. Trovare una base (v_1, v_2, v_3) di $\mathbb{R}^3$ tale che v_1 sia una base di U , e (v_1, v_2) sia una base di W .

- (5) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e sia $W_1 \subset W_2 \subset \dots \subset W_n$ una successione di sottospazi tali che $\dim W_i = i$. Dimostrare che esiste una base $(v_1, \dots, v_n)$ di V tale che, per ogni $1 \leq i \leq n$, i vettori $(v_1, \dots, v_i)$ sono una base di W_i .
- (6) Siano U e V due spazi vettoriali di dimensione finita. Sia $U \times V$ lo spazio vettoriale prodotto cartesiano, con somma e prodotto per scalari definiti in modo naturale. Dimostrare che $\dim(U \times V) = \dim(U) + \dim(V)$.
- (7) Esiste un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^2$ iniettiva? Ed una suriettiva? (Motivare la risposta).
- (8) Esistono due applicazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tali che la loro composizione $g \circ f$ sia iniettiva?

Settimana 8. Esercizi per il 25/11/2020:

- (1) Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio descritto dalle equazioni:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \quad \text{e} \quad x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0.$$

Descrivere W in forma parametrica.

- (2) Sia $W \subset \mathbb{R}^5$ il sottospazio generato dai seguenti vettori:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Descrivere W in forma parametrica e in forma Cartesiana.

- (3) Sia $W \subset \mathbb{R}^3$ il sottospazio descritto dalla parametrizzazione $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$F \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3s + t \\ t - s \\ 2t + 3s \end{pmatrix}$$

- (a) Verificare che F è una parametrizzazione minimale.
- (b) Determinare una base di W .
- (c) Descrivere W in forma Cartesiana.
- (4) Si consideri la seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 8 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Descrivere $N(L_A)$ e $\text{Im}(L_A)$ in forma parametrica e in forma cartesiana.

- (5) Siano U e W due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^8$, tali che $\dim U = 3$ e $\dim W = 5$. Quale delle seguenti affermazioni è sicuramente vera:
 - (i) $\dim(U + W) = 8$,
 - (ii) $\dim(U \cap W) = 2$,
 - (iii) Se $U \cap W \neq 0$, allora $\dim(U + W) = 8$
 - (iv) Se $\dim(U \cap W) = 3$, allora $U \cap W$.
 - (v) Se $\dim(U + W) = 8$, allora $\dim(U \cap W) = 3$.
- (6) Sia $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^5$ un'applicazione lineare con $\dim N(T) = 1$ e sia $W \subset \mathbb{R}^5$ un sottospazio di dimensione di dimensione 4.
 - (a) Dimostrare che $W \cap \text{Im}(T) \neq 0$.
 - (b) Quali sono le possibili dimensioni di $W \cap \text{Im } T$?

(7) Si considerino i seguenti vettori in $\mathbb{R}^5$:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Siano $U = \text{Span}\{u_1, u_2, u_3\}$ e $W = \text{Span}\{w_1, w_2, w_3\}$.

- Determinare una base di $U + W$.
 - Determinare una base di $U \cap W$.
 - Descrivere $U + W$ in forma cartesiana.
 - Descrivere $U \cap W$ in forma cartesiana.
- (8) Calcolare il determinante delle seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 3 & 5 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 7 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Settimana 9. Esercizi per il 2/12/2020:

- (1) Sia U il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sia V il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 4x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 11x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

- Calcolare la dimensione di U e V .
 - Calcolare la dimensione di $U + V$ e $U \cap V$.
- (2) Si consideri lo spazio vettoriale $V = \mathbb{R}[t]_{\leq n-1}$ dei polinomi di grado minore o uguale a $n-1$ e siano $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Si consideri la seguente applicazione lineare $F : V \rightarrow \mathbb{R}^n$, data da

$$F(p(t)) = (p(\lambda_1), p(\lambda_2), \dots, p(\lambda_n)).$$

Si dimostri che F è iniettiva se e solo se i numeri $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono tutti distinti. Dedurre che

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

è uguale a 0 se e solo se due tra i numeri $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono uguali.

- (3) Sia B la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, sia $V = \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ lo spazio delle matrici 2×2 , e sia $F : V \rightarrow V$ l'applicazione lineare definita da $F(X) = B \cdot X$. Calcolare il determinante di F .

- (4) Sia M una matrice a blocchi $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$, con A matrice $p \times p$, B matrice $p \times q$, e D matrice $q \times q$. Dimostrare che $\det(M) = \det(A) \det(D)$, seguendo i seguenti passi.
- Dimostrare che se A non è invertibile, allora non lo è neppure M , e quindi $\det(M) = 0$.

- (b) Se A è invertibile, dimostrare che $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \mathbb{I} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbb{I} & A^{-1}B \\ 0 & \mathbb{I} \end{pmatrix}$ e applicare il Teorema di Binet.
- (c) Calcolare il determinante delle tre matrici che compaiono nella formula precedente.
- (5) Sia V uno spazio vettoriale e sia $F : V \rightarrow V$ una applicazione lineare tale che $F^4 - 2F^2 + \mathbb{I} = 0$. Si dimostri che se λ è un autovalore di F , allora $\lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = 0$.
- (6) Sia $F : V \rightarrow V$ una applicazione lineare e sia $\sqrt{2}$ un autovalore di F . Si dimostri che 6 è un autovalore di $F^4 + F^2$.
- (7) Sia $F : V \rightarrow V$ un'applicazione lineare diagonalizzabile (ovvero che ammette una base di autovettori). Si dimostri che F^2 è diagonalizzabile, e che $2F$ è diagonalizzabile.
- (8) Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.
- (a) Trovare una base di $\mathbb{R}^2$ che consiste di autovettori di A .
- (b) Calcolare A^{100} .

Settimana 10. Esercizi per il 9/12/2020:

- (1) Determinare, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, quali tra le seguenti matrici sono diagonalizzabili (su $\mathbb{R}$ o su $\mathbb{C}$):

$$\begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 1 & k & 1 \\ 0 & -k & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ k+1 & -1 & 0 \\ k-1 & k & k^2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} k-2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & k & 2 & 0 \\ 0 & 0 & k+2 & 0 \\ 1 & 1 & k & 2-k \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- (2) Determinare gli autovalori in $\mathbb{C}$ e gli autovettori in $\mathbb{C}^2$ della matrice complessa $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1+i & i \end{pmatrix}$.
- (3) Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 23 & -84 \\ 6 & -22 \end{pmatrix}$, determinare A^{100} .
- (4) Data una matrice $A \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, si consideri l'applicazione lineare $T_A : \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ data da $T_A(M) = A \cdot M$. Dimostrare che se A è diagonalizzabile se e solo se T_A è diagonalizzabile.
- (5) Esiste un edomorfismo $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ senza nessun autovettore? Esiste un edomorfismo $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ senza nessun autovettore?
- (6) Per la seguente affermazione dire se è vera, fornendone una dimostrazione, o falsa, fornendo un controesempio:
Affermazione: se A e B sono diagonalizzabili, allora $A \cdot B$ è diagonalizzabile.
- (7) Dimostrare che se A è diagonalizzabile allora anche la matrice trasposta A^t è diagonalizzabile.
- (8) Si consideri l'endomorfismo $F : \mathbb{R}[t]_{\leq n} \rightarrow \mathbb{R}[t]_{\leq n}$ dato da $F(p(t)) = (t+1)p'(t)$. Dire se è diagonalizzabile o no.
- (9) Sia $F : V \rightarrow V$ un endomorfismo diverso da $\pm \mathbb{I}$, tale che $F \circ F = \mathbb{I}$. Dimostrare che è diagonalizzabile, con autovalori ± 1 .
- (10) La successione di Fibonacci

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 11, \dots$$

è definita dalla seguente ricorsione:

$$x_0 = 0, x_1 = 1, x_n = x_{n-1} + x_{n-2}.$$

Trovare una formula esplicita per x_n (ad esempio, quanto vale $x_{1000000}$?).

Suggerimenti:

- (i) Dato $n \geq 1$, definire $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$. Determinare X_1 e scrivere un'equazione matriciale che lega X_n a X_{n-1} .

- (ii) Determinare un'equazione matriciale che lega X_n a X_1 , in termini della potenza di una matrice.
- (iii) Risolvere un problema di diagonalizzazione per concludere l'esercizio.
- (11) Sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ una generica matrice simmetrica reale. Si consideri la forma bilineare simmetrica $\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = ax_1y_1 + b(x_1y_2 + x_2y_1) + dx_2y_2$. Verificare che è bilineare e simmetrica. Dimostrare che è definita positiva se e solo se $a > 0$ e $\det(A) > 0$.
- (12) Dimostrare che una qualunque forma bilineare su $\mathbb{R}^n$ è della forma

$$\langle X|Y \rangle = X^t \cdot A \cdot Y,$$

dove A è una matrice $n \times n$, e la forma bilineare è simmetrica se e solo se la matrice A è simmetrica. Supponendo che A sia simmetrica e diagonalizzabile (il Teorema Spettrale ci dirà che ciò è sempre vero per una matrice simmetrica), verificare che il prodotto scalare $\langle X|Y \rangle$ è definito positivo se e solo se A ha tutti gli autovalori strettamente positivi.

- (13) Sia $\langle u|v \rangle$ una forma bilineare su uno spazio vettoriale V di dimensione n . Fissando una base $\mathcal{B}$ di V , possiamo identificare V con $\mathbb{R}^n$, e quindi possiamo associare alla forma bilineare su V una matrice A (vedi l'esercizio precedente). Scrivere una formula che definisca la matrice A . Cosa succede se cambiamo base? Scrivere una formula del cambiamento di base per la matrice di una forma bilineare.

Settimana 11. Esercizi per il 16/12/2020:

- (1) Si consideri lo spazio vettoriale $\text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ delle matrici $n \times n$, ed i seguenti due prodotti scalari:

$$\langle A|B \rangle_1 = \text{Tr}(AB), \quad \langle A|B \rangle_2 = \text{Tr}(A^t B)$$

- (a) Mostrare che $\langle \cdot | \cdot \rangle_1$ e $\langle \cdot | \cdot \rangle_2$ sono forme bilineari simmetriche.
- (b) Mostrare che $\langle \cdot | \cdot \rangle_1$ non è definito positivo, mentre $\langle \cdot | \cdot \rangle_2$ è definito positivo.
- (c) Determinare una base ortonormale per $\langle \cdot | \cdot \rangle_2$.
- (2) Si consideri lo spazio vettoriale $V = \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ dei polinomi di grado minore o uguale a 2 ed il seguente prodotto scalare:

$$\langle p|q \rangle = p(1)q(1) + p(-1)q(-1).$$

Scrivere la matrice di tale prodotto scalare rispetto alla base standard di $\mathbb{R}[t]_{\leq 2}$. Determinare l'insieme $V^\perp$ dei vettori ortogonali a tutto lo spazio V : $V^\perp = \{u \in V \mid \langle u|v \rangle = 0 \text{ per ogni } v \in V\}$.

- (3) Sia A una matrice $n \times n$ simmetrica e siano u un autovettore con autovalore 5 e v un autovettore con autovalore 7. Mostrare che u e v sono perpendicolari rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^n$.
- (4) Si consideri lo spazio Euclideo $\mathbb{R}^3$ con il prodotto scalare standard. Siano U e W due piani per l'origine distinti e siano $U^\perp$ e $W^\perp$ le rette per l'origine perpendicolari a U e W rispettivamente. Mostrare che:
- (a) $(U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp$.
- (b) Esiste una base v_1, v_2, v_3 di $\mathbb{R}^3$ tale che $v_1 \in U \cap W$, $v_2 \in U^\perp$ e $v_3 \in W^\perp$. Determinare una tale base di $\mathbb{R}^3$ (come nel punto (b), nel caso seguente:

$$U = \{x + y = 0\}, \quad W = \{x + z = 0\}.$$

- (5) Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ con il seguente prodotto scalare:

$$\langle p|q \rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2).$$

Costruire una base ortonormale che contenga il vettore $c(x + x^2)$, per un'opportuna costante $c > 0$.

- (6) Si consideri lo spazio Euclideo $\mathbb{R}^3$ con il prodotto scalare standard, ed il piano

$$U = \{x + 2y + z = 0\}$$

Determinare una base ortonormale di U e completarla ad una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.

- (7) Si consideri lo spazio Euclideo $\mathbb{R}^4$ con il prodotto scalare standard, ed il sottospazio

$$W = \{-x + y + z + w = 0\}$$

Determinare una base ortonormale di W e completarla ad una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$.

- (8) Si consideri lo spazio $\mathbb{R}^2$ con il prodotto scalare definito dalla matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Verificare che è un prodotto Euclideo. Determinare una base ortonormale per questo prodotto Euclideo.

- (9) Si consideri il piano $U = \{x + 2y - 2z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$. Scrivere le matrici associate alla proiezione ortogonale P su U , ed alla riflessione ortogonale R rispetto ad U , in base standard di $\mathbb{R}^3$.

Settimana 12. Esercizi per il 21/12/2020:

- (1) Si consideri il seguente sottospazio dello spazio Euclideo (standard) $\mathbb{R}^4$:

$$U = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^4.$$

- (a) Determinare il sottospazio $U^\perp$.
 (b) Trovare una base ortonormale di U ed una base ortonormale di $U^\perp$.
 (c) Osservare che le due basi di sopra, unite, formano una base ortonormale $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^4$. Scrivere la matrice del cambio di base $[\mathbb{I}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}$, dove $\mathcal{E}$ è la base standard di $\mathbb{R}^4$. Verificare che si tratta di una matrice ortogonale.
- (2) Siano U e W due piani distinti in $\mathbb{R}^3$. Si consideri la composizione $f = P_U \circ P_W$, dove P_U e P_W sono le proiezioni ortogonali su U e W rispettivamente. Dimostrare che f è diagonalizzabile con un autovalore 0, un autovalore 1 ed un terzo autovalore compreso tra 0 e 1.
(Suggerimento: disegnare i due piani e trovare geometricamente tre autovettori indipendenti.)

- (3) Scrivere la matrice che descrive la rotazione intorno all'asse $\ell = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ di un angolo

$\alpha = \frac{2}{3}\pi$. Verificare che si tratta di una matrice ortogonale.

- (4) Mostrare che esistono esattamente 48 matrici ortogonali A le cui entrate a_{ij} sono tutti numeri interi. Verificare che ognuna di tali matrici preserva il cubo

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid -1 \leq x, y, z \leq 1 \right\},$$

ovvero $L_A(C) = C$.

- (5) Determinare una base ortonormale di autovettori per la seguente matrice simmetrica:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (6) Sia $T : V \rightarrow V$ un endomorfismo di uno spazio Euclideo V . Supponiamo che T sia contemporaneamente un'isometria ed un endomorfismo autoaggiunto.

- (a) Mostrare che $T^2 = \mathbb{I}_V$.
 (b) Verificare che T è diagonalizzabile con autovalori ± 1 .
 (c) Mostrare che T è una riflessione ortogonale rispetto ad un sottospazio $U \subset V$ (chi è U ?).

- (7) Sia $T : V \rightarrow V$ un endomorfismo autoaggiunto di uno spazio Euclideo V . Supponiamo che $T^2 = T$. Mostrare che T è una proiezione ortogonale su un sottospazio $U \subset V$ (chi è U ?).
- (8) Sia $\langle \cdot | \cdot \rangle$ un prodotto Euclideo su uno spazio vettoriale V , e sia $(\cdot | \cdot)$ una forma bilineare simmetrica su V (non necessariamente definita positiva). Dimostrare che esiste una base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ di V che sia ortonormale per $\langle \cdot | \cdot \rangle$ e *ortogonale* per $(\cdot | \cdot)$, ovvero tale che $(v_i | v_j) = 0$ se $i \neq j$.
- (9) Si consideri lo spazio vettoriale reale $V = C[a, b]$ delle funzioni continue su $[a, b]$ a valori in $\mathbb{R}$, e si consideri il seguente prodotto Euclideo su V :

$$\langle f(x) | g(x) \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

Sia $h \in C[a, b]$ una funzione fissata e si consideri l'endomorfismo $T : V \rightarrow V$ dato da

$$T(f(x)) = h(x)f(x).$$

Mostrare che T è un endomorfismo autoaggiunto di V .

- (10) Si consideri lo spazio vettoriale reale $V = C_c^\infty(\mathbb{R})$ delle funzioni $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ che sono derivabili infinite volte e che hanno supporto compatto, cioè tali che esiste $C > 0$ (dipendente dalla funzione f) per cui $f(x) = 0$ quando $|x| > C$. Si consideri il seguente prodotto Euclideo su V :

$$\langle f(x) | g(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx.$$

(Nota: tale integrale ha senso ed è un numero finito poiché f e g sono a supporto compatto.) Si consideri l'endomorfismo $T : V \rightarrow V$ dato da

$$T(f(x)) = f''(x).$$

Mostrare che T è un endomorfismo autoaggiunto di V .