Soluzione Esercizi Settimana 12

Esercizio 1

Si consideri il seguente sottospazio dello spazio Euclideo (standard) $\mathbb{R}^4$:

$$U = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^4 .$$

(a) Determinare il sottospazio $U^\perp$.

(b) Trovare una base ortonormale di U ed una base ortonormale di $U^\perp$.

(c) Osservare che le due basi di sopra, unite, formano una base ortonormale $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^4$. Scrivere la matrice del cambio di base $[\mathbb{1}]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}$, dove $\mathcal{E}$ è la baset standard di $\mathbb{R}^4$. Verificare che si tratta di una matrice ortogonale.

Soluzione

(a) $U^\perp$ è il sottospazio di equazioni Cartesiane:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

(b) Una base di U è quella data, e per trovarne una ortonormale basta applicare Gram-Schmidt:

$$u_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} , \; u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \left\langle u_1 \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle u_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Una base ortonormale di $U^\perp$ si ottiene risolvendo il sistema:

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \; w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

(c) Sia $\mathcal{B} = (u_1, u_2, w_1, w_2)$. La matrice del cambio di base è:

$$[\mathbb{1}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Si verifica subito che è una matrice ortogonale, ovvero che $[\mathbb{1}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}([\mathbb{1}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}})^T = \mathbb{1}$, e dunque

$$[\mathbb{1}]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}} = ([\mathbb{1}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}})^{-1} = ([\mathbb{1}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}})^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Esercizio 2

Siano U e W due piani distinti in $\mathbb{R}^3$. Si consideri la composizione $f = P_U \circ P_W$, dove P_U e P_W sono le proiezioni ortogonali su U e W rispettivamente. Dimostrare che f è diagonalizzabile con un autovalore 0, un autovalore 1 ed un terzo autovalore compreso tra 0 e 1.

(*Suggerimento:* disegnare i due piani e trovare geometricamente tre autovettori indipendenti.)

Soluzione

Risolto a lezione.

Esercizio 3

Scrivere la matrice che descrive la rotazione intorno all'asse $\ell = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ di un angolo $\alpha = \frac{2}{3}\pi$. Verificare che si tratta di una matrice ortogonale.

Soluzione

Una base ortonormale di ℓ è data da

$$u = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Il piano $\ell^\perp$ ha equazione

$$x + y - z = 0$$

e dunque una sua base ortonormale è

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ w_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Allora $\mathcal{B} = (w_1, w_2, u)$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$, con $w_1, w_2 \in \ell^\perp$ e $u \in \ell$. Dunque, in questa base, la matrice della rotazione R attorno ad ℓ di un angolo $\alpha = \frac{2}{3}\pi$ è:

$$[R]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{2}{3}\pi) & -\sin(\frac{2}{3}\pi) & 0 \\ \sin(\frac{2}{3}\pi) & \cos(\frac{2}{3}\pi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice del cambio di base dalla base $\mathcal{B}$ alla base standard $\mathcal{E}$ è

$$[\mathbb{1}]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} = (w_1|w_2|u) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

e la sua inversa coincide con la trasposta. Quindi

$$R = [R]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = [\mathbb{1}]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}[R]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}([\mathbb{1}]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}})^T$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 4

Mostrare che esistono esattamente 48 matrici ortogonali A le cui entrate a_{ij} sono tutti numeri interi. Verificare che ognuna di tali matrici preserva il cubo

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| -1 \leq x, y, x \leq 1 \right\},$$

ovvero $L_A(C) = C$.

Soluzione

Le colonne di una matrice ortogonale formano una base ortonormale. In particolare hanno norma 1. Quindi ogni colonna ha entrate $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ con a, b, c interi (per ipotesi) tali che $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Evidentemente le uniche possibilità sono che uno dei tre numeri sia ± 1 e gli altri due 0. Allora ogni colonna della matrice A deve essere una di queste 6:

$$\begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 \\ \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$$

Per la prima colonna C_1 abbiamo una scelta qualunque tra queste 6; per la seconda colonna C_2 abbiamo una sceltra tra le 4 rimanenti (escludendo sia C_1 che $-C_1$); ed infinie per l'ultima colonna C_3 abbiamo solo le 2 rimanenti scelte (escludendo $\pm C_1$ e $\pm C_2$). In totale, ci sono

$$6 \times 4 \times 2 = 48$$

possibili matrici, le quali sono evidentemente tutte ortogonali (poichè, per costruzione, le colonne sono ortonormali).

L'azione di una qualunque di tali matrici su $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in C$ può solo permutare le tre lettere x, y, z ed eventualmente cambiare qualche segno. Dunque le tre disuguaglianze $-1 \leq x, y, z \leq 1$ restano verificate. Il che ci dice che $L_A(C) = C$.

Esercizio 5

Determinare una base ortonormale di autovettori per la seguente matrice simmetrica: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Soluzione

Il polinomio caratteristico è

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda) - 1 = \lambda^2 - 3\lambda + 1$$

Dunque gli autovalori sono le due radici $\lambda_+ = \frac{1}{2}(3+\sqrt{5})$ e $\lambda_- = \frac{1}{2}(3-\sqrt{5})$. L'autovettore con autovalore $\lambda_\pm$ è nel nucleo di

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda_\pm & 1 \\ 1 & 1-\lambda_\pm \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{5}}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

È quindi soluzione di

$$x = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})y$$

ovvero, normalizzando,

$$v_+ = \frac{1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix}, \; v_- = \frac{1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \begin{pmatrix} 1-\sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 6

Sia $T : V \to V$ un endomorfismo di uno spazio Euclideo V. Supponiamo che T sia contemporaneamente un'isometria ed un endomorfismo autoaggiunto.

(a) Mostrare che $T^2 = \mathbb{1}_V$.
(b) Verificare che T è diagonalizzabile con autovalori ± 1.
(c) Mostrare che T è una riflessione ortogonale rispetto ad un sottospazio $U \subset V$ (chi è U?).

Soluzione

T è un'isometria se $\langle T(u)|T(v)\rangle = \langle u|v\rangle$ per ogni $u, v \in V$, ed è autoaggiunto se $\langle u|T(v)\rangle = \langle T(u)|v\rangle$ per ogni $u, v \in V$. Mettendo insieme le due condizioni, abbiamo

$$\langle u|v\rangle = \langle T(u)|T(v)\rangle = \langle u|T^2(v)\rangle$$

per ogni $u, v \in V$, ovvero $T^2 = \mathbb{1}_V$. Il che completa la dimostrazione di (a).

Gli autovalori di T devono soddisfare l'equazione $\lambda^2 = 1$, ovvero gli unici possibili autovalori sono $+1$ e -1. E per il Teorema Spettrale T è diagonalizzabile. Quindi $V = V_{+1} \oplus V_{-1}$, dove $V_{+1} = N(T - \mathbb{1})$ è l'autospazio di autovalore 1 e $V_{-1} = N(T + \mathbb{1})$ è l'autospazio di autovalore -1.

Per (c), basta osservare che T agisce come l'identità su V_{+1} e come $-$ l'identità su V_{-1}, e $V_- = V_+^\perp$ per il Teorema Spettrale. Quindi T è la riflessione ortogonale rispetto a V_{+1}.

Esercizio 7

Sia $T : V \to V$ un endomorfismo autoaggiunto di uno spazio Euclideo V. Supponiamo che $T^2 = T$. Mostrare che T è una proiezione ortogonale su un sottospazio $U \subset V$ (chi è U?).

Soluzione

Gli autovalori di T devono soddisfare l'equazione $\lambda^2 = \lambda$, ovvero gli unici possibili autovalori sono 0 e 1. Per il Teorema Spettrale T è diagonalizzabile, quindi $V = V_0 \oplus V_1$, dove $V_0 = N(T)$ e $V_1 = N(T - \mathbb{1})$, ed inoltre $V_0 = V_1^{\perp}$. Ne segue che T è la proiezione ortogonale su V_1.

Esercizio 8

Sia $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ un prodotto Euclideo su uno spazio vettoriale V, e sia $(\cdot \,|\, \cdot)$ una forma bilineare simmetrica su V (non necessariamente definita positiva). Dimostrare che esiste una base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ di V che sia ortonormale per $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ e *ortogonale* per $(\cdot \,|\, \cdot)$, ovvero tale che $(v_i | v_j) = 0$ se $i \neq j$.

Soluzione

Una forma bilineare simmetrica $(\cdot \,|\, \cdot)$ corrisponde (in una base ortonormale per $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$) ad una matrice simmetrica. Quindi la tesi non è altro che una formulazione equivalente del Teorema Spettrale.

Esercizio 9

Si consideri lo spazio vettoriale reale $V = C[a, b]$ delle funzioni continue su $[a, b]$ a valori in $\mathbb{R}$, e si consideri il seguente prodotto Euclideo su V:

$$\langle f(x) | g(x) \rangle = \int_a^b f(x) g(x) dx \,.$$

Sia $h \in C[a, b]$ una funzione fissata e si consideri l'endomorfismo $T : V \to V$ dato da

$$T(f(x)) = h(x) f(x) \,.$$

Mostrare che T è un endomorfismo autoaggiunto di V.

Soluzione

Ovvio, dalla definizione.

Esercizio 10

Si consideri lo spazio vettoriale reale $V = C_c^{\infty}(\mathbb{R})$ delle funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che sono derivabili infinite volte e che hanno supporto compatto, cioè tali che esiste $C > 0$ (dipendente dalla funzione f) per cui $f(x) = 0$ quando $|x| > C$. Si consideri il seguente prodotto Euclideo su V:

$$\langle f(x) | g(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(x) dx \,.$$

(Nota: tale integrale ha senso ed è un numero finito poiché f e g sono a supporto compatto.) Si consideri l'endomorfismo $T : V \to V$ dato da

$$T(f(x)) = f''(x) \,.$$

Mostrare che T è un endomorfismo autoaggiunto di V.

Soluzione

Segue dalla regola di integrazione per parti (applicata due volte), usando il fatto che tutti i termini di bordo si annullano:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f''(x) g(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g''(x) dx \,.$$