Geometria - Ingegneria Aerospaziale

Prof. A. De Sole

Prova scritta del 24-1-2022

Esercizio 1. Al variare del parametro reale a , dire se il seguente sistema ammette soluzioni e, in tal caso, determinarle,

$$\begin{cases} 2x + y + az = -a \\ x + (a+1)y + z = a+2 \\ x + y + (a+1)z = a+5 \end{cases}$$

Esercizio 2. Sia $U \subset \mathbb{R}[t]_{\leq 4}$ il sottospazio vettoriale dei polinomi $p(t)$ tali che $p(1) = p(2) = 0$ e sia $W \subset \mathbb{R}[t]_{\leq 4}$ il sottospazio vettoriale generato da $t+1, t^2+1, t^3+1, t^4+1$. Calcolare la dimensione di $U \cap W$ e darne descrizione in forma parametrica.

Esercizio 3. Sia $f : \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ l'applicazione lineare data da $f(X) = A^t \cdot X$, dove X è una matrice 2×2 e A^t è la trasposta della seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Dire se f è diagonalizzabile e, in caso affermativo, esibire una base di autovettori.

(b) Calcolare

$$f^4\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right),$$

dove $f^4 = f \circ f \circ f \circ f$.

Esercizio 4. Sia $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ e sia $W \subset \mathbb{R}^3$ il piano di equazione $x + z = 0$. Si determini il punto Q dato dalla riflessione ortogonale di P rispetto al piano W .

Esercizio 5. Sia V lo spazio vettoriale delle matrici 3×3 antisimmetriche reali, ovvero tali che $X^t = -X$.

Indichiamo con $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto euclideo di V dato da $\langle X, Y \rangle = \text{tr}(X^t \cdot Y)$. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, e

sia $f : V \rightarrow V$ l'endomorfismo dato da $f(X) = AX + XA$. Dimostrare che f è autoaggiunto rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e determinare una base ortonormale di autovettori di f .