

## Diario delle lezioni

**Settimana 1.** (*Lettura:* Abate - de Fabritiis cap. 3)

**(27/9)-ADS(2h)** Presentazione del corso. Sistemi di equazioni lineari: metodo di sostituzione.

**(28/9)-ADS(2h)** Matrici a scala e matrici a scala ridotta. Sistemi di equazioni lineari: eliminazione di Gauss. Teorema di Rouchet-Capelli.

**(29/9)-ADS(2h)** Esercizi su matrici a scala e eliminazione di Gauss.

**(30/9)-ADS(2h)** Definizione di spazio vettoriale ed esempi. Sottospazi vettoriali.

**Settimana 2.** (*Lettura:* Abate - de Fabritiis cap. 4)

**(4/10)-GM(2h)** Correzione esercizi della prima settimana.

**(5/10)-ADS(2h)** Combinazioni lineari. Sistemi di generatori e indipendenza lineare. Interpretazione dei concetti di sistema di generatori e di indipendenza lineare in termini di sistemi di equazioni lineari.

**(6/10)-ADS(2h)** Basi. Sistema di coordinate associato ad una base. Enunciato del Teorema del completamento: se  $u_1, \dots, u_m \in V$  sono linearmente indipendenti e  $w_1, \dots, w_n \in V$  sono un sistema di generatori, allora esiste una base di  $V$  della forma  $(u_1, \dots, u_m$  più, eventualmente, qualche  $w_j$ ). Inoltre  $m \leq \#(\text{base}) \leq n$ . Applicazione 1: definizione della dimensione di uno spazio vettoriale. Applicazione 2: definizione del rango di una matrice.

**(7/10)-ADS(2h)** Dimostrazione del Teorema del completamento. Applicazione 3: se  $U \subset V$ , allora  $\dim U \leq \dim V$  (e = vale se e solo se  $U = V$ ).

**Settimana 3.** (*Lettura:* Abate - de Fabritiis cap. 5)

**(11/10)-ADS(2h)** Numeri complessi: rappresentazione cartesiana e polare. Potenze e radici.

**(12/10)-GM(2h)** Correzione esercizi della seconda settimana.

**(13/10)-ADS(2h)** Applicazioni lineari: definizione ed esempi. Applicazione lineare  $L_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  associata ad una matrice  $m \times n$ .

**(14/10)-ADS(2h)** Nucleo e immagine di un'applicazione lineare. Teorema della dimensione:  $\dim V = \dim \text{Ker}(f) + \dim \text{Im}(f)$ .

**Settimana 4.** (*Lettura:* Abate - de Fabritiis cap. 6-7-8)

**(18/10)-GM(2h)** Correzione esercizi settimanali.

**(19/10)-ADS(2h)** Data una matrice  $A$ , metodo per trovare una base dello span delle colonne. Somma di sottospazi  $U + W \subset V$ . Teorema di Grassmann:  $\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$ . Somma diretta  $U \oplus W$ .

**(20/10)-ADS(2h)** Lemma: dati  $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$ ,  $X \in \mathbb{R}^n$  e  $Y \in \mathbb{R}^m$ , vale  $\phi_Y(L_A(X)) = \phi_{L_{A^t}(Y)}(X)$ . Proposizione: data una matrice  $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$ , valgono:  $\mathbb{R}^m = \text{Im}(L_A) \oplus \text{ker}(L_{A^t})$  e  $\mathbb{R}^m = \text{Im}(L_{A^t}) \oplus \text{ker}(L_A)$ . Inoltre, vale  $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^t)$ .

**(21/10)-ADS(2h)** Composizione tra applicazioni lineari e prodotto righe per colonne tra matrici. Matrice associata ad un'applicazione lineare  $f : V \rightarrow W$  rispetto a basi  $\mathcal{B}$  di  $V$  e  $\mathcal{C}$  di  $W$ .

**Settimana 5.** (*Lettura:* Abate - de Fabritiis cap. 6-7-8)

**(25/10)-GM(2h)** Correzione esercizi settimanali.

**(26/10)-ADS(2h)** Proposizione:  $(AB)^t = B^t A^t$ . Notazione per le coordinate  $[v]_{\mathcal{B}}$  di un vettore  $v$  in base  $\mathcal{B}$  e per la matrice  $[f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$  di un'applicazione lineare  $f$  in basi  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$ . Equazioni cartesiane e parametriche di un sottospazio di  $\mathbb{R}^n$ . Passaggio dalla forma cartesiana alla forma parametrica e viceversa.

**(27/10)-ADS(2h)** Equazioni cartesiane e parametriche di somma e intersezione di sottospazi. Varie caratterizzazioni (equivalenti) delle applicazioni lineari invertibili. Varie caratterizzazioni (equivalenti) delle matrici invertibili.

**(28/10)-ADS(2h)** Calcolo della matrice inversa tramite l'eliminazione di Gauss. Matrice del cambio di base. Formule del cambiamento di base per le coordinate di un vettore e per la matrice di un'applicazione lineare.

**Settimana 6.** (*Lettura:* Abate - de Fabritiis cap. 9)

**(2/11)-GM(2h)** Correzione esercizi settimanali.

**(3/11)-ADS(2h)** Teorema del rango: data un'applicazione lineare  $f : V \rightarrow W$  di rango  $r$ , esistono basi di  $V$  e  $W$  tali che la matrice di  $f$  sia  $\begin{pmatrix} \mathbb{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

**(4/11)-ADS(2h)** Definizione del determinante come unica funzione multilineare e alterna sulle righe (o sulle colonne) tale che  $\det(\mathbb{I}) = 1$ . Sviluppo di Laplace lungo una riga o una colonna.

**Settimana 7.** (*Lettura:* Abate - de Fabritiis 13)

**(8/11)-ADS(2h)** Calcolo del determinante tramite l'eliminazione di Gauss. Formula del determinante come somma sulle permutazioni.

**(9/11)-GM(2h)** Correzione esercizi settimanali.

**(10/11)-ADS(2h)** Problema di diagonalizzazione. Definizione di autovettori e autovalori. Polinomio caratteristico.

**(11/11)-ADS(2h)** Applicazione della diagonalizzazione al calcolo della successione di Fibonacci. Teorema: ad autovalori distinti corrispondono autovettori linearmente indipendenti.

**Settimana 8.** (*Lettura:* Abate - de Fabritiis 13, 10)

**(15/11)-GM(2h)** Correzione esercizi settimanali. Inversa di una matrice usando la matrice dei cofattori. Teorema di Cramer.

**(16/11)-ADS(2h)** Molteplicità algebrica e geometrica. Teorema: la molteplicità geometrica di un autovalore è minore o uguale a quella algebrica. Teorema: un endomorfismo è diagonalizzabile su  $\mathbb{C}$  se e solo se le molteplicità algebriche e geometriche di ciascun autovalore coincidono.

**(17/11)-ADS(2h)** Esempi di diagonalizzazione e di matrici non diagonalizzabili. Forma canonica di Jordan e Teorema di Jordan (solo enunciato).

**(18/11)-ADS(2h)** Sottospazi affini di  $\mathbb{R}^n$ . Equazioni cartesiane e parametriche di un sottospazio affine di  $\mathbb{R}^n$ . Equazioni cartesiane e parametriche di una retta per due punti e di un piano per tre punti. Due rette nello spazio: condizioni di rette coincidenti, parallele, incidenti e sghembe (sia in termini di equazioni cartesiane che di equazioni parametriche).

**Settimana 9.** (*Lettura:* Abate - de Fabritiis 10, 11)

**(22/11)-GM(2h)** Correzione esercizi settimanali. Gli autospazi di un endomorfismo sono in somma diretta. Un endomorfismo di  $V$  è diagonalizzabile se e solo se la somma (diretta) degli autospazi è tutto  $V$ .

**(23/11)-ADS(2h)** Un piano ed una retta nello spazio: condizioni di retta appartenente al piano, parallela al piano e incidente il piano (sia in termini di equazioni cartesiane che di equazioni parametriche). Due piani nello spazio: condizioni di piani coincidenti, paralleli e incidenti (sia in termini di equazioni cartesiane che di equazioni parametriche). Distanze e angoli nel piano.

**(24/11)-ADS(2h)** Forme bilineari, prodotti scalari e prodotti euclidei. Esempi. Forme bilineari su  $\mathbb{R}^n$  e matrici  $n \times n$ .

**(25/11)-ADS(2h)** Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz e disuguaglianza triangolare. Distanze e angoli in uno spazio euclideo. Basi ortonormali. Metodo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt.

**Settimana 10.** (*Lettura:* Abate - de Fabritiis 12, 14)

**(29/11)-GM(2h)** Correzione esercizi settimanali.

**(30/11)-ADS(2h)** Matrice di una forma bilineare (in una base fissata). Restrizione di una forma bilineare ad un sottospazio. Proposizione: una forma bilineare è non degenere se e solo se ha matrice invertibile. Proposizione: se la restrizione del prodotto scalare  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  ad un sottospazio  $U \subset V$  è non-degenere, allora  $V = U \oplus U^\perp$ .

**(1/12)-ADS(2h)** Formula del cambiamento di base per la matrice di una forma bilineare. Matrici congruenti. Teorema di Sylvester: rango e segnatura di una matrice.

**(2/12)-ADS(2h)** Matrici ortogonali e basi ortonormali. Matrici simmetriche e endomorfismi autoaggiunti. Enunciato del Teorema Spettrale.

**Settimana 11.** (*Lettura:* Abate - de Fabritiis 14)

**(6/12)-GM(2h)** Correzione esercizi settimanali.

**(7/12)** Lezione CANCELLATA

**(9/12)-ADS(2h)** Dimostrazione del Teorema Spettrale. Applicazioni.

**Settimana 12.** (*Lettura:* Abate - de Fabritiis 14, 15)

**(13/12)-ADS(2h)** Correzione esercizi settimanali.

**(14/12)** Lezione CANCELLATA per evento organizzato dal CAD di Ingegneria Aerospaziale.

**(15/12)-ADS(2h)** Quadriche in  $\mathbb{R}^n$ . Cambiamenti di coordinate e quadriche congruenti. Problema di classificazione.

**(16/12)-ADS(2h)** Classificazione delle coniche in  $\mathbb{R}^2$  e delle quadriche in  $\mathbb{R}^3$ .

**Settimana 13.** (*Lettura:* - )

**(20/12)-ADS(2h)** Correzione degli esercizi.

**(21/12)-ADS(2h)** Riepilogo e esercitazione per l'esame.