Geometria – Ingegneria Aerospaziale – A.A. 2021-22, I Semestre
DOCENTI: ALBERTO DE SOLE & GABRIELE MONDELLO

Esercizi settimanali

Settimana 1 - consegna lunedì 4/10

Ex.1 - Risolvere i seguenti sistemi lineari

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 9 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ -x_2 + x_3 - x_4 = -6 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = -3 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 2 \\ 5x_1 + 2x_3 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 7. \end{cases}$$

Ex.2 - Al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$ dire quante soluzioni ammetta il seguente sistema lineare.

$$\begin{cases} 2x + ty - z = t \\ tx - y + 2z = 3 \\ x + 2y - 3z = -2. \end{cases}$$

Ex.3 - Dire quale relazione deve intercorrere tra i parametri $a, b, c \in \mathbb{R}$ affinché il sistema lineare

$$\begin{cases} x - 3y = a \\ 2y - z = b \\ x - 5y + z = c \end{cases}$$

ammetta soluzione.

Ex.4 - Trovare le soluzioni del seguente sistema lineare.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = -3 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 2 \\ 5x_1 + 2x_3 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 7. \end{cases}$$

Ex.5 - Al variare dei parametri $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ dire quante soluzioni ammetta il seguente sistema lineare.

$$\begin{cases} x + 2y = 1 - \alpha \\ x + \alpha y + (\alpha - 2)z = \beta \\ 2x + 5y + z = \gamma. \end{cases}$$

Ex.6 - Si consideri il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} 2x_2 + 2x_3 + 6x_4 + x_5 = 7 \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 + 11x_4 = 4 \\ x_1 + 3x_3 + 4x_4 + x_5 = 4 \end{cases}$$

(a) Scrivere la matrice dei coefficienti A e la matrice completa $\widetilde{A}$ associate al sistema.
(b) Ridurre la matrice completa a scalini.
(c) Calcolare il rango di A e $\widetilde{A}$.
(d) Descrivere l'insieme delle soluzioni del sistema.

Ex.7 - Si consideri il seguente sistema lineare al variare del parametro $c \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 6x_4 = 13 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 = c^2 + 4 \\ x_2 + 3x_3 + x_4 = c^2 \\ x_1 + 2x_3 + 3x_4 = 7 \end{cases}$$

(a) Calcolare (al variare del parametro c) il rango della matrice dei coefficienti e della matrice completa.

(b) Per quali valori di c il sistema ammette soluzione? E quando ammette soluzioni, quante soluzioni ha?

Settimana 2 - consegna lunedì 11/10

Ex.1 - Dato un polinomio $p(t)$, si consideri il suo *grafico*, definito come l'insieme

$$S = \{(t, p(t)) \,|\, t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2 .$$

Dire per quali polinomi $p(t)$ l'insieme S è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$.

Ex.2 - Sia $\mathbb{R}[t]_{\leq 3}$ l'insieme dei polinomi di grado minore o uguale a 3. Verificare che $\mathbb{R}[t]_{\leq 3}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[t]$. Sia inoltre $S_c = \{p(t) \in \mathbb{R}[t]_{\leq 3} \,|\, p(1) = c\}$. Dire per quali valori di $c \in \mathbb{R}$ l'insieme S_c è un sottospazion vettoriale di $\mathbb{R}[t]_{\leq 3}$.

Ex.3 - Dimostrare che i vettori $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ formano una base di $\mathbb{R}^2$. Determinare le coordinate di $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ in tale base.

Ex.4 - Si considerino i polinomi $1 + t$, $1 + 2t + t^2$, $t - t^2$. Verificare che questi tre polinomi formano una base di $\mathbb{R}[t]_{\leq 3}$. Determinare le coordinate del polinomio $3 + t^2$ in tale base.

Ex.5 - Si consideri lo spazio vettoriale $\mathrm{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$ di tutte le matrici $m \times n$. è uno spazio vettoriale e determinarne la dimensione (esibendone una base).

Ex.6 - Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n Dimostrare che:

(a) se $(u_1, \ldots, u_n)$ è un sistema di generatori per V, allora $(u_1, \ldots, u_n)$ sono una base;

(b) se $(u_1, \ldots, u_n)$ sono linearmente indipendenti in V, allora $(u_1, \ldots, u_n)$ sono una base.

Ex.7 - Siano U e W sottospazi di uno spazi o vettoriale V.

(a) Dimostrare che $U \cap W$ è un sottospazio vettoriale di V

(b) Dimostrare che $U \cup W$ è un sottospazio vettoriale di V solo se $U \subset W$ o $W \subset U$.

Ex.8 - Si considerino i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$:

(a) $U = \{(x, y) \,|\, 3x + 4y = 0\}$,

(b) $V = \{(x, y) \,|\, 3x + 4y = 1\}$,

(c) $W = \{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 = 1\}$,

(d) $X = \{(x, y) \,|\, x \geq 0,\, y \geq 0\}$,

(e) $Y = \{(x, y) \,|\, x^2 + 4xy + 4y^2 = 0\}$.

Quali sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^2$?

Ex.9 - Si considerino i seguenti sottoinsiemi di $\mathcal{F}un(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$:

(a) $U = \{f(x) \in \mathcal{F}un(\mathbb{Z}, \mathbb{R}) \,|\, f(1) = 0, f(2) = 0\}$,

(b) $V = \{f(x) \in \mathcal{F}un(\mathbb{Z}, \mathbb{R}) \,|\, f(1)f(2) = 0\}$,

(c) $W = \{f(x) \in \mathcal{F}un(\mathbb{Z}, \mathbb{R}) \,|\, f(-x) = f(x) \,\forall\, x \in \mathbb{Z}\}$,

(d) $X = \{f(x) \in \mathcal{F}un(\mathbb{Z}, \mathbb{R}) \,|\, f(x + 1) = 2f(x) \,\forall\, x \in \mathbb{Z}\}$,

(e) $Y = \{f(x) \in \mathcal{F}un(\mathbb{Z}, \mathbb{R}) \,|\, f(x + 1) = f(x) + 1 \,\forall x \in \mathbb{Z}\}$.

Quali sono sottospazi vettoriali di $\mathcal{F}un(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$?

Ex.10 - Si consideri l'insieme $V = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 0\}$ con le seguenti operazioni di somma: $x +_V y = xy$, e di prodotto per scalari: $\lambda \cdot_V x = x^\lambda$. Dimostrare (verificando tutti gli assiomi) o disprovare (trovando un controesempio) la seguente affermazione: $(V, +_V, \cdot_V)$ è uno spazio vettoriale.

Settimana 3 - consegna lunedì 18/10

Ex.1 - Considerare il sottoinsieme $\mathcal{A} = \{v_1, v_2, v_3\}$ di $\mathbb{R}^4$, dove

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dire se $\mathcal{A}$ sia linearmente indipendente. Se non lo è, estrarre da $\mathcal{A}$ una base di $\mathrm{Span}(\mathcal{A})$.

Ex.2 - Dire se il sottoinsieme $\mathcal{C} = \{w_1, w_2, w_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ dato da

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

sia una base di $\mathbb{R}^3$.

Ex.3 - Considerare il sottoinsieme $V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$ di $\mathbb{R}^3$.
Dimostrare che V è un sottospazio vettoriale, determinarne una base $\mathcal{B}$ e completarla ad una base di $\mathbb{R}^3$.

Ex.4 - Sia $\mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ lo spazio vettoriale reale dei polinomi di grado al più 2 in t a coefficienti reali e siano $p_1 = 1 - t$, $p_2 = 1 - t^2$, $p_3 = t$ elementi di $\mathbb{R}[t]_{\leq 2}$. Dimostrare che $\{p_1, p_2, p_3\}$ è una base di $\mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ e scrivere $q = 2 - 5t + t^2$ come combinazione lineare di p_1, p_2, p_3.

Ex.5 - Al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$, determinare una base del sottospazio $W \subset \mathbb{R}^4$ delle soluzioni del seguente sistema lineare

$$\begin{cases} 3x_1 + (2+\lambda)x_2 + 7x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + (\lambda - 1)x_4 = 0 \end{cases}$$

Ex.6 - Siano $q_1 = 2 - t + t^2$, $q_2 = 3 + 2t^2 - 2t$, $q_3 = 1 - t + t^2$, $q_4 = t - t^2$ elementi di $\mathbb{R}[t]_{\leq 2}$. Dimostrare che $\{q_1, q_2, q_3, q_4\}$ è un insieme di generatori di $\mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ ed estrarne una base.

Ex.7 - Scrivere i seguenti numeri complessi nella forma cartesiana $a + ib$ (con a, b reali)

$$(1+i)(1-2i), \quad \frac{13-2i}{6+4i}, \quad (1-i)^3, \quad \frac{(1+i)^{2017}}{16^{252}}, (\cos(\pi/9) + i\sin(\pi/9))^3.$$

Esprimere in forma cartesiana $a+ib$ le radici quadrate dei numeri complessi $1+2i$, $4-3i$, $1+4i$.

Ex.8 - Calcolare modulo e parte reale dei numeri complessi $(1+i)^3(1-i)^3$ e $(1+i)^{476}\left(\frac{1-i}{2}\right)^{476}$.
Esprimere i numeri complessi $2 + i2\sqrt{3}$ e $3(1+i)$ in forma polare (ossia $r(\cos\theta + i\sin\theta)$).

Ex.9 - Trovare tutti gli $z \in \mathbb{C}$ che soddisfino

$$(a) \quad |z|\bar{z} = 2i; \qquad (b) \quad \bar{z}^3 + z^2 = 0; \qquad (c) \quad \mathrm{Re}(z^2) = z + i.$$

Ex.10 - Determinare e disegnare i seguenti sottoinsiemi del piano di Gauss:

$$A = \{z \in \mathbb{C} \,|\, iz/(1+iz) \in \mathbb{R}\}, \qquad B = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z-i| < |z+i|\}.$$

Settimana 4 - consegna lunedì 25/10

Ex.1 - Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la seguente funzione $f_k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ è un'applicazione lineare:

$$f_k \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ (k-1)\sin(x) + (k^2-1)y \\ 2x + 2y \end{pmatrix}$$

Ex.2 - Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, con $n \geq m$, data da

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

Dimostrare che è lineare. Trovare una matrice $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ tale che $f = L_A$. Determinare nucleo e immagine di f.

Ex.3 - Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}[t]_{\leq 2} \to \mathbb{R}^2$ data da

$$f(p(t)) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \end{pmatrix}$$

Verificare che è un'applicazione lineare e determinare nucleo e immagine.

Ex.4 - Trova un'applicazione lineare $f : V \to W$ e due vettori $u, v \in V$ tali che u, v siano linearmente indipendenti mentre $f(u), f(v)$ non lo siano.

Ex.5 - Siano $F : \mathbb{R}[t] \to \mathbb{R}[t]$, $G : \mathbb{R}[t] \to \mathbb{R}^3$ e $H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}[t]$ definite nel modo seguente:

$$F(p(t)) = (t^2-5t)p(t)\,,\ G(p(t)) = \begin{pmatrix} p(1) \\ p(2) \\ p(7) \end{pmatrix}\,,\ H\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x(t-1)+y(t-3)+z(t-7)+(t-8)\,.$$

(a) Dire quali tra F, G, H sono applicazioni lineari.
(b) Dire quali tra F, G, H sono iniettive.
(c) Dire quali tra F, G, H sono suriettive.
(d) Determinare $G \circ H$ e $F \circ H$.

Ex.6 - Sia $F :, \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+y+z \\ 2x+y \\ x+z \\ x+y-z \end{pmatrix}$$

Determinare una matrice A tale che $F = L_A$. Dire quali tra i seguenti elementi sono nel nucleo di F (ovvero soluzioni di $F(v) = 0$):

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Dire quali tra i seguenti elementi sono nell'immagine di F:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ex.7 - Sia $D : \mathbb{R}[t] \to \mathbb{R}[t]$ l'applicazione lineare di derivazione: $D(p(t)) = p'(t)$. Determinare il nucleo e l'immagine di D.

Ex.8 - Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare e siano $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$. Per ciascuna delle seguenti affermazioni, dire se si tratta di affermazioni vere, fornendone una dimostrazione, o false, fornendone un controesempio:

(a) se f è iniettiva e $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sono linearmente indipendenti in V, allora $f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)$ sono linearmente indipendenti in W.
(b) se f è iniettiva e $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sono un sistema di generatori di V, allora $f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)$ sono un sistema di generatori di W.
(c) se f è suriettiva e $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sono linearmente indipendenti in V, allora $f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)$ sono linearmente indipendenti in W.
(d) se f è suriettiva e $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sono un sistema di generatori di V, allora $f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)$ sono un sistema di generatori di W.

(e) se f è biunivoca e $v_1, v_2, \dots, v_n$ sono una base di V, allora $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)$ sono una base di W.

Settimana 5 - consegna martedì 2/11

Ex.1 - Considerare la matrice $A = \begin{pmatrix} 9 & -7 & 2 \\ 18 & -9 & -1 \\ 9 & -9 & 4 \end{pmatrix}$. Determinare equazioni parametriche e cartesiane del nucleo e dell'immagine di L_A.

Ex.2 - Considerare la matrice $B_t = \begin{pmatrix} 0 & t & t-1 \\ t-2 & 1 & 2t-2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Al variare di $t \in \mathbb{R}$, calcolare le dimensioni di nucleo e immagine di L_B e trovare per quali t si abbia $\mathbb{R}^3 = \ker(L_B) \oplus \operatorname{Im}(L_B)$.

Ex.3 - Al variare del parametro reale t, determinare equazioni parametriche e cartesiane per il sottospazio vettoriale V_t di $\mathbb{R}^4$ generato da $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, dove

$$v_1 = -e_2 + 2t\, e_4, \quad v_2 = e_1 + t\, e_4, \quad v_3 = t\, e_1 + e_3 + t\, e_4, \quad v_4 = 2t\, e_1 - e_2.$$

(Dove $e_1, \dots, e_4$ è la base canonica di $\mathbb{R}^4$.)

Ex.4 - Siano $U, W \subseteq \mathbb{R}^4$ sottospazi vettoriali definiti come

$$U = \operatorname{Span}(e_1 + e_3,\ e_1 + e_2 + e_4,\ e_1 - e_2 + 2e_3 - e_4),$$
$$W = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 = 0\}.$$

Determinare una base di $U + W$ e una base di $U \cap W$, ed equazioni cartesiane di $U \cap W$.

Ex.5 - Siano $U, V \subseteq \mathbb{R}^4$ sottospazi vettoriali definiti come $U = \operatorname{Span}(u_1, u_2, u_3)$ e $V = \operatorname{Span}(v_1, v_2, v_3)$, dove

$$\begin{aligned} &u_1 = e_1 + e_3 + 4e_4, && u_2 = 2e_1 + e_2 + e_3 + 3e_4, && u_3 = -e_1 - e_2 + e_3 + 6e_4, \\ &v_1 = e_1 + 3e_2 + 3e_3 + e_4, && v_2 = 2e_1 + 4e_2 + 3e_3, && v_3 = 2e_2 - 3e_3 - 2e_4. \end{aligned}$$

Determinare equazioni cartesiane per U e per V, calcolare le dimensioni di U e V, esibire una base di $U \cap V$ e trovare un supplementare di $U \cap V$ (ossia un sottospazio $W \subseteq \mathbb{R}^4$ tale che $W \oplus (U \cap V) = \mathbb{R}^4$).

Ex.6 - Calcolare tutti i prodotti possibili tra le seguenti matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ex.7 - La *traccia* di una matrice A quadrata $n \times n$ è la somma degli elementi lungo la diagonale principale $\operatorname{tr}(A) := a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$, dove a_{ij} denota l'elemento della matrice A nella posizione (i, j) (cioè nella riga i e colonna j). Dimostrare che, se A è una matrice $p \times q$ e B è una matrice $q \times p$, allora $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

Ex.8 - Siano $p_1 = 5$, $p_2 = 1 - t^2$, $p_3 = t + t^2 - 2t^3$, $p_4 = -5t + 10t^3$, $p_5 = 1 + t + t^3$. Estrarre, se possibile, dall'insieme $\{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$ una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}[t]_{\leq 3}$. Determinare la matrice che rappresenta l'identità $\operatorname{Id} : \mathbb{R}[t]_{\leq 3} \to \mathbb{R}[t]_{\leq 3}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ in partenza ed alla base $\mathcal{C} = \{1,\ t,\ t^2,\ t^3\}$ in arrivo.

Ex.9 - Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'unica applicazione lineare tale che $f(e_1) = e_2$, $f(e_2) = e_3$, $f(e_3) = e_1$. Calcolare la matrice che rappresenta f rispetto alla base $\mathcal{B} = \{e_1 + 2e_2,\ e_2 - e_3,\ e_3\}$ in partenza e $\mathcal{C} = \{e_1 - e_2,\ e_2 + e_1,\ e_1 + e_3\}$ in arrivo.

Ex.10 - Sia $\mathbb{R}[t]_{\leq k}$ lo spazio vettoriale dei polinomi reali in t di grado al più k. Siano $\mathcal{B} = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ base di $\mathbb{R}[t]_{\leq 3}$ e $\mathcal{C} = \{q_1, q_2, q_3\}$ base di $\mathbb{R}[t]_{\leq 2}$, dove

$$p_1 = t + 1,\ p_2 = t^2 + 1,\ p_3 = t^3 - t,\ p_4 = t^3 - 1,\ q_1 = 2t - 1,\ q_2 = 3 - t,\ q_3 = t^2 - 1.$$

Determinare la matrice A che rappresenta l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}[t]_{\leq 2} \to \mathbb{R}[t]_{\leq 3}$ definita come $F(r(t)) := t \cdot r(t) + r(1)$, rispetto alla basi $\mathcal{C}$ in partenza e $\mathcal{B}$ in arrivo.

Calcolare il vettore $X \in \mathbb{R}^3$ delle coordinate del polinomio $r(t) = t^2 - t \in \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ rispetto alla base $\mathcal{C}$ e il vettore $Y \in \mathbb{R}^4$ delle coordinate di $F(r(t)) \in \mathbb{R}[t]_{\leq 3}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$, e mostrare che $AX = Y$.

Settimana 6 - consegna lunedì 8/11

Ex.1 - Scrivere equazioni cartesiane per il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ di equazioni parametriche:

$$x = t_1 + 2t_2 - t_3\,,\ y = 4t_1 - 5t_2 + t_3\,,\ z = 6t_1 - 2t_2 - 4t_3\,,\ w = -3t_1 + 2t_2 + t_3\,.$$

Da tali equazioni passa poi nuovamente ad equazioni parametriche: si ottengono le stesse equazioni di partenza? Perché?

Ex.2 - Scrivere equazioni parametriche per il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ di equazioni cartesiane:

$$x + y + z - w = 0\,,\ 2x - 3y + 7z + 13w = 0\,,\ x - y + 3z + 5w = 0\,.$$

Da tali equazioni passa poi nuovamente ad equazioni cartesiane: si ottengono le stesse equazioni di partenza? Perché?

Ex.3 - Siano $f : U \to V$ e $g : V \to W$ due applicazioni lineari fra spazi vettoriali. Dimostrare che $\mathrm{rg}(g \circ f) \leq \min\{\mathrm{rg}\, f, \mathrm{rg}\, g\}$.

Ex.4 - Si consideri l'applicazione lineare $T : \mathrm{Mat}_{2\times 3}(\mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}_{3\times 2}(\mathbb{R})$ data da $T(A) = A^t$ (trasposta). Scegliere delle basi di $\mathrm{Mat}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ e $\mathrm{Mat}_{3\times 2}(\mathbb{R})$ e scrivere la corrispondente matrice associata a f. Calcolare il rango di T, dire se T è invertibile e, nel caso lo sia, determinare l'applicazione inversa.

Ex.5 - Sia $T : V \to V$ un'applicazione lineare tale che $T \circ T = T$. Dimostrare che $V = \ker(T) \oplus \mathrm{Im}(T)$.

Ex.6 - Sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Dimostrare che A è invertibile se e solo se $ad \neq bc$ e che, in tal caso, la matrice inversa è $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Ex.7 - Al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, dire se la seguente matrice è invertibile e trovarne l'inversa: $\begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 1 & k & k \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Ex.8 - Date $A, B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$, mostrare che $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$, dove Tr indica la traccia di una matrice (ovvero $a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$). Dedurre che $\mathrm{Tr}(BAB^{-1}) = \mathrm{Tr}(A)$ se B è invertibile.

Ex.9 - Sia $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base standard di $\mathbb{R}^3$. Siano $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $w_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Verificare che $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$. Dimostrare che esiste un'unica applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f(v_i) = w_i$ per $i = 1, 2, 3$. Determinare le matrici $[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$ e $[f]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}$ di f sia rispetto alla base $\mathcal{B}$ sia rispetto alla base standard $\mathcal{E}$. Scrivere la matrice del cambio di base e verificare la formula del cambiamento di base.

Ex.10 - Considera l'applicazione $f : \mathbb{R}[t]_{\leq 2} \to \mathbb{R}^3$ data da $f(p(t)) = \begin{pmatrix} p'(0) \\ p(1) - p(2) \\ p(4) - p(6) \end{pmatrix}$, dove $p'(t)$ è la derivata di $p(t)$. Scrivere la matrice A associata a f rispetto alla base $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ di $\mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ ed alla base standard $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^3$. Determinare basi $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ e $\mathcal{D}$ di $\mathbb{R}^3$ tali che la matrice di f in tali basi sia $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Verificare la formula del cambiamento di base $B = PAQ$, dove P e Q sono le opportune matrici del cambio di base.

Settimana 7 - consegna lunedì 15/11

Ex.1 - Calcolare il determinante delle seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 3 & 5 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 7 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ex.2 - Considerare la seguente matrice dipendente dal parametro $t \in \mathbb{R}$

$$A_t := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & t \end{pmatrix}.$$

Calcolare $\det(A_t)$ e la matrice dei cofattori di A_t. Dire per quali t la matrice A_t sia invertibile e, per tali t, calcolarne l'inversa.

Ex.3 - Siano $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Calcolare il determinante della matrice $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ b & 0 & 1 & a \\ c & d & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ex.4 - I numeri 2418, 1395, 8091, 8339 sono numeri interi multipli di 31. Senza effettura il conto esplicito, dimostrare che il determinante della matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 5 \\ 8 & 0 & 9 & 1 \\ 8 & 3 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

è un intero multiplo di 31.

Ex.5 - Sia M una matrice a blocchi $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$, con A matrice $p \times p$, B matrice $p \times q$, e D matrice $q \times q$. Dimostrare che $\det(M) = \det(A)\det(D)$, seguendo i seguenti passi.

(a) Dimostrare che se A non è invertibile, allora non lo è neppure M, e quindi $\det(M) = 0$.

(b) Se A è invertibile, dimostrare che $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbb{1} & A^{-1}B \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}$ e applicare il Teorema di Binet.

(c) Calcolare il determinante delle tre matrici che compaiono nella formula precedente.

Ex.6 - Dimostrare che

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \cdots & \frac{1}{n} \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{n!}\right)^2,$$

dove $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$.

Ex.7 - Si consideri lo spazio vettoriale $V = \mathbb{R}[t]_{\leq n-1}$ dei polinomi di grado minore o uguale a $n-1$ e siano $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Si consideri la seguente applicazione lineare $F : V \to \mathbb{R}^n$, data da

$$F(p(t)) = (p(\lambda_1), p(\lambda_2), \ldots, p(\lambda_n)).$$

Si dimostri che F è iniettiva se e solo se i numeri $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sono tutti distinti. Dedurre che

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1}, \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1}, \\ \vdots & \vdots & & \cdots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1}, \end{pmatrix}$$

è uguale a 0 se e solo se due tra i numeri $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono uguali.

Ex.8 - Sia B la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, sia $V = \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ lo spazio delle matrici 2×2, e sia $F : V \to V$ l'applicazione lineare definita da $F(X) = B \cdot X$. Calcolare il determinante di F.

Settimana 8 - consegna lunedì 22/11

Ex.1 - Sia $F : V \to V$ una applicazione lineare e sia $\sqrt{2}$ un autovalore di F. Si dimostri che 6 è un autovalore di $F^4 + F^2$.

Ex.2 - Sia $F : V \to V$ un'applicazione lineare diagonalizzabile (ovvero che ammette una basi di autovettori). Si dimostri che F^2 è diagonalizzabile, e che $2F$ è diagonalizzabile.

Ex.3 - Determinare, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, quali tra le seguenti matrici sono diagonalizzabili (su $\mathbb{R}$ o su $\mathbb{C}$):

$$\begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 1 & k & 1 \\ 0 & -k & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ k+1 & -1 & 0 \\ k-1 & k & k^2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} k-2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & k & 2 & 0 \\ 0 & 0 & k+2 & 0 \\ 1 & 1 & k & 2-k \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ex.4 - Determinare gli autovalori in $\mathbb{C}$ e gli autovettori in $\mathbb{C}^2$ della matrice complessa $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1+i & i \end{pmatrix}$.

Ex.5 - Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 23 & -84 \\ 6 & -22 \end{pmatrix}$, determinare A^{100}.

Ex.6 - Data una matrice $A \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, si consideri l'applicazione lineare $T_A : \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ data da $T_A(M) = A \cdot M$. Dimostrare che se A è diagonalizzabile allora T_A è diagonalizzabile.

Ex.7 - Esiste un edomorfismo $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ senza nessun autovettore (in $\mathbb{R}^2$)? Esiste un edomorfismo $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ senza nessun autovettore (in $\mathbb{R}^3$)?

Ex.8 - Dimostrare che se A è diagonalizzabile allora anche la matrice trasposta A^t è diagonalizzabile.

Ex.9 - Si consideri l'endomorfismo $F : \mathbb{R}[t]_{\leq n} \to \mathbb{R}[t]_{\leq n}$ dato da $F(p(t)) = (t+1)p'(t)$. Dire se è diagonalizzabile o no.

Ex.10 - Sia $F : V \to V$ un endomorfismo diverso da $\pm \mathbb{1}$, tale che $F \circ F = \mathbb{1}$. Dimostrare che è diagonalizzabile, con autovalori ± 1.

Settimana 9 - consegna lunedì 29/11

Ex.1 - Determinare per quali valori del parametro $t \in \mathbb{R}$ la seguente matrice è diagonalizzabile:

$$\begin{pmatrix} t-1 & 2t & t \\ 0 & t-1 & 0 \\ 2 & t+2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ex.2 - Dire se le seguenti affermazioni sono vere (fornendo una dimostrazione) o false (fornendo un controesempio):

(a) Se $f : V \to V$ è diagonalizzabile, allora $V = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

(b) Se $f : V \to V$ è tale che $V = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$, allora f è diagonalizzabile.

Ex.3 - Data la seguente matrice A, determinare una matrice invertibile P ed una matrice diagonale D tali che $A = PDP^{-1}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ex.4 - Determinare la forma canonica di Jordan delle seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ex.5 - Determinare equazioni parametriche e cartesiane per la retta passante per i punti $P = (\pi, 1, 3)$ e $Q = (\pi, 0, 2)$.

Ex.6 - Determinare equazioni parametriche e cartesiane per il piano contenente i punti $P = (0, 1, 0)$, $Q = (-1, 0, 0)$ e $R = (0, 0, 1)$.

Ex.7 - Date le due rette ℓ e ℓ' di equazioni parametriche

$$\ell : \; x = 3 + t, \, y = -1 - t, \, z = 2 + 2t \,,$$

e

$$\ell' : \; x = 2 - t, \, y = 1 + t, \, z = 2 + t \,,$$

determinare se sono coincidenti, parallele, incidenti o sghembe.

Ex.8 - Date le rette ℓ e ℓ' di equazioni cartesiane

$$\ell : \; x + y = 0, \, x + 2y + z = 0 \,,$$

e

$$\ell' : \; x - y = -1, \, x + 5y + z = 0 \,,$$

determinare se sono coincidenti, parallele, incidenti o sghembe.

Ex.9 - Dati il piano π di equazione cartesiana

$$\pi : \; 2x + 3y - z = 4 \,,$$

e la retta ℓ di equazioni cartesiane

$$\ell : \; x + y = 0, \, x - z = 1 \,,$$

determinare se sono una contenuta nell'altro, paralleli o incidenti e, nell'ultimo caso, determinare il punto di intersezione.

Ex.10 - Determinare equazioni cartesiane e parametriche del piano (se esiste) che contiene le rette ℓ e ℓ' di equazioni cartesiane

$$\ell : \; 3x - y + z = 0, \, x + y + z = 0 \,,$$

e

$$\ell' : \; -x - y + 2z = 0, \, x - z = 0 \,.$$

Settimana 10 - consegna lunedì 6/12

Ex.1 - Determinare equazioni parametriche e cartesiane del piano affine contenente i punti $(0, 1, 0)$, $(-1, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$.

Ex.2 - Determinare equazioni parametriche e cartesiane del piano affine contenente il punto $(1, 0, 1)$ e la retta di equazioni cartesiane $x + y + z = 3$, $x = y + z$.

Ex.3 - Determinare equazioni parametriche e cartesiane della retta affine contenente il punto $(0, 7, 1)$ e parallela alla retta di equazioni $3x + y + z = 4$, $2x + y + z = 4$.

Ex.4 - Determinare quali tra queste funzioni $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sono forme bilineari, quali (tra di esse) sono prodotti scalari, e quali (tra queste ultime) sono prodotti euclidei.

(a) $f(X, Y) = x_1^2 + y_2^2 + x_3 y_3$;
(b) $f(X, Y) = x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + 3x_2 y_2 + \pi x_3 y_3$;
(c) $f(X, Y) = x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_2 y_3 + x_3 y_2 + x_1 y_3 + x_3 y_1$;
(d) $f(X, Y) = 3x_1 y_1 - x_1 y_2 + x_3 y_3$;
(e) $f(X, Y) = -x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3$;
(f) $f(X, Y) = x_1 y_1 - x_2 y_2$;
(g) $f(X, Y) = 400x_1 y_1 + s\sqrt{\pi} x_1 y_3 + 2\sqrt{\pi} x_3 y_1 + 227 x_3 y_3$ (al variare del parametro s).

Ex.5 - Si consideri la funzione $f : \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \times \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ data da $f(A, B) = \mathrm{Tr}(B^t PA)$, dove $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e Tr denota la traccia di una matrice. Dire se f è una forma bilineare dello spazio vettoriale $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, se lo è dire si si tratta di un prodotto scalare, e se lo è dire se si tratta di un prodotto euclideo.

Ex.6 - Sia $V \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai seguenti vettori: $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Trovare una base ortonormale di V (rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^4$) ed estenderla ad una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$.

Ex.7 - Trovare un esempio di spazio vettoriale V con un prodotto scalare $\langle \cdot | \cdot \rangle$ non-degenere ed un sottospazio $U \subset V$ non nullo tali che $U \subset U^\perp$.

Ex.8 - Verificare che le seguenti rette ℓ e ℓ' sono incidenti e calcolare il coseno dell'angolo fra di esse:

$$\ell : \quad x = 2t - 9,\ y = 3t + 1,\ z = t - 6$$

e

$$\ell' : \quad x = 4t - 1,\ y = -1,\ z = 5t + 5$$

Ex.9 - Calcolare il coseno dell'angolo fra la retta ℓ di equazioni parametriche

$$\ell : \quad x = 2t - 9,\ y = 3t + 1,\ z = t - 6$$

ed il piano Π di equazioni cartesiane

$$\Pi : \quad x + y + 2z = 3\,.$$

Ex.10 - Determinare equazioni parametriche e cartesiane del piano passante per il punto $(0, 1, 0)$ e ortogonale alla retta di equazioni cartesiane $x - y = 1$, $y - z = 0$.

Settimana 11 - consegna lunedì 13/12

Ex.1 - Sia $V = \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ lo spazio vettoriale dei polinomi reali in t di grado al più 2 e sia $b : V \times V \to \mathbb{R}$ definita come

$$b(p, q) := p(0)q(0) + p(1)q(-1) + p(-1)q(1) - 3p'(0)q'(0).$$

(i) Dimostrare che b è una forma bilineare simmetrica.
(ii) Determinare rango e segnatura di b.
(iii) Determinare una base di V ortogonale per b.

Ex.2 - Sia $\mathbb{R}^4$ munito del prodotto scalare standard e sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio definito come $U = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = 0\}$. Determinare una base ortonormale di U, una base ortonormale di $U^\perp$ e determinare la matrice A tale che $L_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ sia la proiezione ortogonale su U.

Ex.3 - Determinare il prodotto scalare definito positivo su $\mathbb{R}^3$ tale che la base $\mathcal{B} = (e_1 + 2e_3,\ -e_1 + e_2,\ -2e_1 + 2e_2 + e_3\}$ sia ortonormale.

Ex.4 - Calcolare rango e segnatura del prodotto scalare di $\mathbb{R}^3$ associato alla matrice

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

e determinarne una base ortogonale.

Ex.5 - Negli esercizi 5-6-7 vedremo come si utilizza il Teorema di Jordan per risolvere sistemi lineari di equazioni differenziali del primo ordine.

Data una matrice $n \times n$ A, la matrice esponenziale è definita tramite la serie

$$e^A = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} A^k \,,$$

che si può mostrare essere sempre convergente. Siano A, B matrici reali $n \times n$.

(i) Se A è diagonale con elementi diagonali $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, calcolare e^{tA}, $t \in \mathbb{R}$ e dimostrare che $\det(e^A) = e^{\mathrm{Tr}(A)}$.

(ii) Dedurre che, se $A = PDP^{-1}$ è diagonalizzabile (con P invertibile e D diagonale), allora anche e^A è diagonalizzabile, e $\det(e^A) = e^{\mathrm{tr}(A)}$.

(ii) Per $n = 2$ trovare un esempio di A, B tali che $e^A e^B \neq e^B e^A$.

(iii) Dimostrare che, se $AB = BA$, allora $e^A e^B = e^{A+B} = e^B e^A$.

Ex.6 - (i) Si consideri la matrice nilpotente:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dopo aver verificato che $A^3 = 0$, calcolare e^{tA}, $t \in \mathbb{R}$.

(ii) Si consideri un singolo blocco di Jordan 3×3 con autovalore λ:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda \mathbb{I}_3 + A$$

Calcolare e^{tJ}, $t \in \mathbb{R}$. (*Suggerimento:* usare 5 (iii) e 6(i).)

Ex.7 - Ricordiamo che l'equazione differenziale lineare del primo ordine $\frac{dx(t)}{dt} = ax(t)$, con dato iniziale $x(0) = c$, ammette l'unica soluzione $x(t) = ce^{at}$, $t \in \mathbb{R}$.

Si consideri il seguente sistema di equazioni differenziali lineari del primo ordine:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = ax(t) + by(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} = cx(t) + dy(t) \end{cases}$$

con dato iniziale

$$x(0) = h \,, \quad y(0) = k \,.$$

Riscrive il sistema in forma matriciale, in termini della matrice dei coefficienti $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e trovare la soluzione (dipendenti dai parametri h e k) nei seguenti casi:

(i) $A = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$,

(ii) $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$,

(iii) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ex.8 - Verificare che le soluzioni trovate nell'esercizio precedente sono effettivamente soluzioni del sistema.

Ex.9 - Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ munito del prodotto scalare standard, considerare il punto $P = (3, -1, -1)$, la retta $L = \{x - 2y = 1,\ 2x + y + z = 2\}$ e il piano $\Pi = \{x + z = 6\}$. Determinare i punti $Q \in L$ e $S \in \Pi$ più vicini a P. Calcolare quindi la distanza tra P e Q, e la distanza tra P e S.

Ex.10 - Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ munito del prodotto scalare standard, considerare le rette $L_1 = \{x + 2y = 1,\ 2x - y + z = 2\}$ e $L_2 = \{y + 3z = 0,\ x + y + z = 2\}$. Determinare i punti $P_1 \in L_1$ e $P_2 \in L_2$ a distanza minima e calcolare la distanza tra P_1 e P_2.

Settimana 12 - consegna lunedì 20/12

Ex.1 - Trovare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ di autovettori per la seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ex.2 - Sia $f : V \to V$ un endomorfismo diagonalizzabile dello spazio vettoriale V. Dimostra che esiste un prodotto euclideo su V per cui f è autoaggiunto.

Ex.3 - Sia V uno spazio euclideo e sia $f : V \to V$ un endomorfismo autoaggiunto tale che $f^k = \mathbb{1}_V$ per qualche $k \geq 1$. Dimostrare che $k = 1$ o 2.

Ex.4 - Determinare tutti i valori dei parametri h e k per cui le seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & h & k \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & k & 0 \\ h & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

sono

(a) diagonalizzabili,

(b) diagonalizzabili in una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.

Ex.5 - Scrivere la matrice A della riflessione ortogonale $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ rispetto al piano Π di equazione cartesiana $x + 2y - z = 0$ (ovvero S manda un vettore $v \in \mathbb{R}^3$ nel vettore “speculare” rispetto al piano Π). Trovare una matrice ortogonale P tale che P^tAP sia diagonale.

Ex.6 - Sia V lo spazio vettoriale delle matrici 3×3 antisimmetriche, ovvero tali che $A^t = -A$. Indichiamo con $\langle \cdot , \cdot \rangle$ il prodotto euclideo di V dato da $\langle X, Y \rangle = \mathrm{Tr}(X^tY)$. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, e sia $f : V \to V$ l'endomorfismo dato da $f(X) = AX + XA$. Dimostrare che f è autoaggiunto rispetto a $\langle \cdot , \cdot \rangle$ e determinare una base ortonormale di autovettori di f.

Ex.7 - Si consideri lo spazio vettoriale reale $V = C_c^\infty(\mathbb{R})$ delle funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che sono derivabili infinite volte e che hanno supporto compatto, cioè tali che esiste $C > 0$ (dipendente dalla funzione f) per cui $f(x) = 0$ quando $|x| > C$. Si consideri il seguente prodotto Euclideo su V:

$$\langle f(x)|g(x)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx\,.$$

(Nota: tale integrale ha senso ed è un numero finito poiché f e g sono a supporto compatto.) Si consideri l'endomorfismo $T : V \to V$ dato da

$$T(f(x)) = f''(x)\,.$$

Dire (motivando la risposta) se T è un endomorfismo autoaggiunto di V oppure no.

Ex.8 - Sia A una matrice simmetrica $n \times n$, associata al prodotto scalare $\langle X|Y\rangle_A = X^tAY$, $X, Y \in \mathbb{R}^n$. Denotiamo con A_k la *sottomatrice principale* di ordine k, ovvero la sottomatrice di A ottenuta considerando le prime k righe e k colonne.

(a) Verificare che A_k è la matrice di $\langle X|Y\rangle_A$ ristretto al sottospazio $\mathrm{Span}\{e_1, \ldots, e_k\} \subset \mathbb{R}^n$, in base $e_1, \ldots, e_k$.

(b) Dimostrare che se $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ è definito positivo allora $\det(A_k) > 0$ per ogni $k = 1, \ldots, n$.

(c) Viceversa dimostrare (per induzione du n) che se $\det(A_k) > 0$ per ogni $k = 1, \ldots, n$, allora $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ è definito positivo.