Algebra 1

Proff. A. D'Andrea, A. De Sole

Primo appello, 26 giugno 2023

Nome: ______________________________

Cognome: ______________________________

Numero di matricola: ______________________

Docente: **D'Andrea** $\setminus$ **De Sole** (cerchiare il/i docente/i).

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	6	
2	6	
3	6	
4	6	
5	6	
Totale	30	

Esercizio 1. Si consideri l'insieme $S = \left\{\theta \in \mathbb{R} \,\middle|\, \sin(\theta) \in \mathbb{Q}\right\}$. Determinare se l'insieme X ha cardinalità finita, numerabile o se ha la cardinalità del continuo, giustificando la risposta.

Soluzione:

Risposta: $|S| =$ **finita** / **numerabile** / **card. del continuo** (cerchiare la risposta corretta).

Esercizio 2. (a) Determinare il numero n_7 di 7-Sylow nel gruppo S_7.

(b) Dato un 7-Sylow $H \subset S_7$, sia $K = N_G(H)$ il normalizzatore di H (ovvero il più grande sottogruppo di G in cui H è normale). Determinare l'ordine di K.

Soluzione:

Risposta: (a) $n_7 = \boxed{}$ (b) $|K| = \boxed{}$

Esercizio 3. Ci interessiamo all'anello quoziente $A = \mathbb{Z}[i]/(7+5i)$.

(a) Dire se A sia un dominio d'integrità.

(b) Calcolare il nucleo dell'omomorfismo $\phi : \mathbb{Z} \to A$ definito da $\phi(n) = [n]$.

(c) Quanti elementi contiene A?

Soluzione:

Risposta: (a) A ̀dominio? **SI** / **NO**. (a) $\ker(\phi) = \boxed{}$. (c) $|A| = \boxed{}$

Esercizio 4. Sia $A \neq \mathrm{Id}$ una matrice 3×3 a coefficienti razionali che soddisfa l'identità $(A^4 + 5)(A^2 - 2A + \mathrm{Id}) = 0$. Determinare le possibili forme di Jordan (complesse) J di A.

[Sugg.: che si può dire del polinomio minimo di A?]

Soluzione:

Risposta: $J =$ $\boxed{}$

Esercizio 5. Calcolare il polinomio minimo $f(x)$ di $\alpha = \sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$ su $\mathbb{Q}$.

Soluzione:

Risposta: $f(x) = \boxed{}$

Foglio per la brutta copia

Foglio per la brutta copia

Foglio per la brutta copia