Algebra 1

Proff. A. D'Andrea, A. De Sole

Primo appello, 26 giugno 2023

Nome: ______________________________

Cognome: ______________________________

Numero di matricola: ______________________

Docente: **D'Andrea** \ **De Sole** (cerchiare il/i docente/i).

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	5	
2	5	
3	5	
4	5	
5	5	
6	5	
Totale	30	

Esercizio 1. Dall'intervallo chiuso $X_0 = [0,1]$ togliamo l'intervallo aperto centrale $(1/3, 2/3)$. Otteniamo così l'insieme $X_1 = [0,1/3] \cup [2/3,1]$. Da ciascuno dei due intervalli chiusi che compongono X_1 possiamo rimuovere l'intervallo aperto centrale ottenendo così $X_2 = [0,1/9] \cup [2/9,1/3] \cup [2/3,7/9] \cup [8/9,1]$; possiamo iterare la costruzione e ottenere i sottoinsiemi $X_k, k \in \mathbb{N}$. L'insieme di Cantor è l'intersezione $X = \bigcap_{i=0}^{\infty} X_k$. Calcolare la cardinalità di X e del suo complementare $[0,1] \setminus X$.

(*Suggerimento:* un numero $x \in [0,1)$ può essere scritto in forma "ternaria", analoga a quella decimale, come $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}$, con $a_i \in \{0,1,2\}$. Descrivere gli elementi dell'insieme di Cantor X in termini della loro rappresentazione ternaria.)

Soluzione:

Risposta:
(a) $|X| =$ **finita** / **numerabile** / **continuo**; (b) $|[0,1] \setminus X| =$ **finita** / **numerabile** / **continuo**.

Esercizio 2. Calcolare le ultime tre cifre xxx dell'espansione decimale del numero 2023^{2102}.

Soluzione:

Risposta: $xxx = \boxed{}$

Esercizio 3.

Se G è il gruppo

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 2^k & q \\ 0 & 2^{-k} \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R}) \mid k \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Q} \right\},$$

indichiamo con H il suo sottogruppo

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R}) \mid n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

(a) Determinare l'insieme $S_1 = \{g \in G \mid gHg^{-1} \subset H\}$ e mostrare che **non** è un sottogruppo di G.

(b) Determinare l'insieme $S_2 = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$ e mostrare che è un sottogruppo di G.

Soluzione:

Risposta:

$S_1 =$ $\boxed{}$; $S_2 =$ $\boxed{}$

Esercizio 4. Si consideri il seguente polinomio:

$$f(x) = x^4 + 3x^2 + 4x + 5$$

(a) Dire se $f(x)$ è irriducibile in $\mathbb{F}_2[x]$.

(b) Dire se $f(x)$ è irriducibile in $\mathbb{F}_3[x]$.

(c) Dire se $f(x)$ è irriducibile in $\mathbb{Z}[x]$.

(Per ciascuna risposta occorre fornire la motivazione.)

Soluzione:

Risposta:
$f(x)$ è irriducibile in: (a) $\mathbb{F}_2[x]$? **SI** / **NO**; (b) $\mathbb{F}_3[x]$? **SI** / **NO**; (c) $\mathbb{Z}[x]$? **SI** / **NO**.

Esercizio 5. Determinare tutti (a meno di isomorfismo) i gruppi abeliani di ordine 120 con almeno un elemento di ordine 4.

Soluzione:

Risposta:

Classificazione:

Esercizio 6. Determinare il numero n dei polinomi irriducibili monici di grado 3 in: (a) $\mathbb{F}_3[x]$; (b) $\mathbb{F}_5[x]$.

Soluzione:

Risposta: (a) in $\mathbb{F}_3[x]$ vale $n = \boxed{}$ (b) in $\mathbb{F}_5[x]$ vale $n = \boxed{}$

Foglio per la brutta copia

Foglio per la brutta copia

Foglio per la brutta copia