Algebra I - Esercitazione

29/03/2023

Esercizio 1. Dimostrare la seguente affermazione: per ogni $g \in S_n$ e per ogni $k \in \mathbb{Z}$ tale che $< g > = < g^k >$, g e g^k sono coniugati ($< x >$ indica il sottogruppo generato da x).

Esercizio 2. Stabilire se l'insieme
$$\left\{ \begin{pmatrix} z & z \\ z & z \end{pmatrix} \Big| z \in \mathbb{C}^* \right\}$$
può essere dotato di una struttura di gruppo, e in caso affermativo indicare il prodotto e l'elemento identità.

Esercizio 3. Sia G un gruppo finito di ordine maggiore di 3, dotato di un sottogruppo H di indice 2 o 3. Dimostrare che G non è semplice.

Esercizio 4. Dimostrare che non esiste un gruppo semplice di ordine 405. Fare lo stesso per gruppi di ordine 588.

Esercizio 5. Trovare per quali valori di k il seguente sistema di equazioni modulari ha soluzione, e determinarne una per almeno due valori diversi di k:
$$\begin{cases} 8x \equiv 1 \quad (33) \\ x \equiv k \quad (21) \end{cases}$$

Esercizio 6. Determinare se i seguenti anelli sono domini d'integrità, euclidei, ad ideali principali, o a fattorizzazione unica.
$$\mathbb{C}[t] \qquad \mathbb{Z}[t] \qquad C[t]/(t^2) \qquad \mathbb{Z}[x,y]/(x^2 - y^2)$$

Esercizio 7. Dimostrare che:

- ◇ in un anello commutativo unitario A, un elemento x non è invertibile se e soltanto se appartiene ad un ideale massimale di A;
- ◇ x appartiene ad ogni ideale massimale di A se e soltanto se per ogni $y \in A$, $xy - 1$ è invertibile;
- ◇ in un anello locale (ovvero un anello con un unico ideale massimale $\mathfrak{m}$) commutativo unitario, un elemento x non appartiene ad $\mathfrak{m}$ se e soltanto se esiste un elemento y tale che $xy - 1 \in \mathfrak{m}$.

Dedurre che in un anello locale, l'insieme degli elementi non invertibili coincide con il complementare dell'ideale massimale.

Esercizio 8. Determinare se i seguenti sottoinsiemi dell'anello delle matrici 3×3 a coefficienti complessi sono sottoanelli, ideali sinistri, destri o bilateri.
$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} \Big| z \in \mathbb{C} \right\} \qquad \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & w \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix} \Big| z, w, u \in \mathbb{C} \right\} \qquad \{A \mid \det(A) = 0\}$$

Esercizio 9.

- ◇ Gli anelli $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ e $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ sono domini d'integrità? Se sì, sono a fattorizzazione unica?
- ◇ Dimostrare che $\mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{-3}}{2}]$ è un dominio d'integrità.

Esercizio 10. Stabilire se gli anelli
$$\mathbb{C}[x,y]/(x^3, y^2) \qquad \mathbb{C}[x^3, y^2] \qquad \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$
sono noetheriani.