Algebra I - Esercitazione

31/05/2023

Esercizio 1. Siano R un anello ed I un suo ideale. Definiamo il *radicale* di I come

$$\sqrt{I} \coloneqq \{\, a \in R \mid \exists\, n \in \mathbb{N} \text{ t.c. } a^n \in I \,\}$$

Dimostrare le seguenti affermazioni:

- $I = \sqrt{I} \iff \exists\, J$ t.c. $I = \sqrt{J}$. In tal caso I si dice *radicale*;
- I è radicale $\iff R/I$ è un anello ridotto (ovvero non ha elementi nilpotenti);
- $$\sqrt{I} = \bigcap_{I \subseteq P} P$$

  (*Suggerimento*: ripensare ad un esercizio della quinta scheda.)

Esercizio 2. Sia R un anello commutativo; denotiamo con $\operatorname{Spec}(R)$ l'insieme degli ideali primi di R (R stesso non incluso). Dato un sottoinsieme $S \subseteq R$, definiamo

$$V(S) \coloneqq \{\, P \in \operatorname{Spec}(R) \mid S \subseteq P \,\}$$

Se denotiamo con $I(S)$ l'ideale generato da S, dimostrare che:

- $V(S) = V(I(S))$;
- $V(I) = V(\sqrt{I})$;
- $\operatorname{Spec}(R)$ è uno spazio topologico i cui chiusi sono i $V(I)$, al variare di I.

Esercizio 3. Determinare se $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ e $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ sono isomorfi come campi e/o come $\mathbb{Q}$-spazi vettoriali.

Esercizio 4. Sia $\mathbb{F}$ un campo ed $f \in \mathbb{F}[x]$ un polinomio; il *campo di spezzamento* di f è la più piccola estensione $\mathbb{K} \supseteq \mathbb{F}$ tale che f è completamente riducibile in $\mathbb{K}[x]$. Determinare il campo di spezzamento dei seguenti polinomi in $\mathbb{Q}[x]$:

- $3x^3 - 2x^2 + 3x - 2$;
- $x^3 - 3$;
- $x^3 - x^2 + 6x - 6$.

Esercizio 5. Siano p un primo e $\mathbb{F}_p$ il campo finito con p elementi. Determinare se i seguenti polinomi sono irriducibili o meno in $\mathbb{F}_p[x]$, al variare di p:

- $x^{p-1} - 1$;
- $x^2 + 1$;
- $x^p - 3$.

Esercizio 6. Determinare, se esistono, i polinomi minimi a coefficienti razionali e reali dei seguenti numeri complessi:

$$i - 3 \qquad \sqrt[4]{2} \qquad i - \sqrt{3} \qquad e^{\frac{3i\pi}{4}} \qquad i\pi$$