Algebra I - Esercitazione

05/04/2023

Esercizio 1. Siano G_1 e G_2 gruppi finiti di ordini rispettivamente n ed m, con $(n,m)=1$. Dimostrare che ogni sottogruppo di $G \coloneqq G_1 \times G_2$ è della forma $H_1 \times H_2$, dove $H_i \leq G_i$.

Esercizio 2. Determinare il nucleo K del seguente morfismo di anelli:

$$\begin{aligned} A \coloneqq \mathbb{Q}[t_1,\ldots,t_n] &\longrightarrow \mathbb{Q}[\omega_1,\ldots,\omega_n] \eqqcolon B \\ t_i \quad &\longmapsto \quad \omega_i \end{aligned}$$

dove le ω_i sono le radici complesse n-esime dell'unità. Dare un isomorfismo tra A/K, ed un opportuno quoziente di $\mathbb{Q}[t]$.

Esercizio 3. Sia G un gruppo finito di ordine n che agisce non banalmente su un insieme X di cardinalità m. Determinare una condizione numerica tra n ed m sufficiente affinché G non sia semplice.
Si ricorda che un'azione di un gruppo G su un insieme X non è altro che un morfismo di gruppi da G al gruppo delle permutazioni degli elementi di X. Un'azione non banale è un morfismo non banale.

Esercizio 4. Dati due gruppi finiti $H \leq G$ tali che:

- $H \leq Z(G)$
- ${}^{G}/_{H}$ è ciclico

dimostrare che G è abeliano.

Esercizio 5. Dimostrare che se un ideale primo P di un anello commutativo unitario A contiene il prodotto di due ideali I e J, allora contiene I oppure contiene J.

Esercizio 6. Sia $R \xrightarrow{\varphi} S$ un morfismo di anelli commutativi unitari.

- Dimostrare che se R è un campo allora φ è iniettiva oppure $\varphi = 0$;
- Se φ è suriettivo, dimostrare che manda l'identità di R nell'identità di S. Trovare un esempio di morfismo non suriettivo che non verifica questa proprietà.

Esercizio 7. Siano p un primo e G un p-gruppo finito che agisce su un insieme finito X. Dimostrare che la cardinalità dell'insieme dei punti fissi X^G è congrua alla cardinalità di X modulo p.

Esercizio 8. Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, e sia $C[(a,b)]$ l'anello delle funzioni continue a valori reali definite sull'intervallo $[a,b]$ con le usuali operazioni di somma e prodotto tra funzioni. Sia $x \in [a,b]$.

- Dimostrare che

  $$\begin{aligned} \Phi_x \colon C[(a,b)] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

  è un morfismo di anelli suriettivo.
- Le funzioni costanti costituiscono un ideale?
- Il nucelo di Φ_x è un ideale massimale?