Algebra I - Esercitazione

26/04/2023

Esercizio 1. Determinare le soluzioni del seguente sistema di equazioni alle congruenze

$$\begin{cases} 12387^{8252}x \equiv 1 \pmod{10}, \\ 13x + 7 \equiv 0 \pmod{12}. \end{cases}$$

Esercizio 2. Descrivere tutti i gruppi abeliani di ordine 240.

Esercizio 3. Sia G un gruppo abeliano finito e $x, y \in G$ tali che

$$\mathrm{MCD}(\mathrm{o}(x), \mathrm{o}(y)) = 1.$$

Si provi che $\mathrm{o}(xy) = \mathrm{o}(x) \cdot \mathrm{o}(y)$.

- Trovare un controesempio nel caso in cui

$$\mathrm{MCD}(\mathrm{o}(x), \mathrm{o}(y)) \neq 1.$$

- Trovare un controesempio nel caso in cui il gruppo non sia abeliano.

Esercizio 4. Provare che $|Z(\mathcal{S}_n)| = 1$ per ogni $n \geq 3$.

Esercizio 5. Provare che $\mathrm{Aut}(\mathcal{S}_3) = \mathcal{S}_3$. *Suggerimento: Usare l'esercizio precedente.*

Esercizio 6. Calcolare l'identità di Bézout per gli elementi di $2 + 3i$ e $3 + 5i$ in $\mathbb{Z}[i]$.

Esercizio 7. Determinare tutti gli ideali massimali di $\mathbb{Q}[x]$ contenenti l'ideale generato da $p = x^7 - x^5 - x^4 + x^2$ e $q = x^5 - x$.

Esercizio 8. Sia $f := \frac{2}{3}x^3 - 3x^2 + x + 2 \in \mathbb{Q}[x]$ ed I l'ideale di $\mathbb{Q}[x]$ generato da f. Dimostrare che $\mathbb{Q}[x]/I$ è un campo e determinare l'inverso di $I + x$.

Esercizio 9. Sia A un anello commutativo con unità. Mostrare che il sottoinsieme

$$N = \{a \in A \mid a^n = 0 \text{ per qualche } n \in \mathbb{N}\}$$

è un ideale di A. Calcolare N quando $A = \mathbb{Z}/(12)$.
(☹) Dimostrare che

$$N = \bigcap_{P \text{ primo}} P$$