

Algebra I - Esercitazione

03/05/2023

Esercizio 1. Determinare le soluzioni del seguente sistema di equazioni alle congruenze

$$\begin{cases} 3943^{7134}x \equiv 5 \pmod{13}, \\ 126x - 6 \equiv 0 \pmod{44}. \end{cases}$$

Esercizio 2. Scomporre i seguenti polinomi in fattori irriducibili in $\mathbb{Q}[x]$:

- ◇ $2x^2 - 5x + 2$;
- ◇ $2x^3 - 5x + 2$;
- ◇ $x^3 - 2x - 4$;
- ◇ $2x^4 - 4x^2 + 2$;
- ◇ $x^4 - x^2 - 2$.

Esercizio 3. Quanti sono gli elementi di ordine 5 nel gruppo degli invertibili di $\mathbb{Z}/44\mathbb{Z}$?

Esercizio 4. Determinare tutti gli ideali massimali di $\mathbb{Z}[i]$ contenenti $12 + 6i$.

Esercizio 5. Sia G un gruppo e sia φ un automorfismo di G . Dimostrare che $\varphi(Z(G)) \subseteq Z(G)$. In generale vale l'uguaglianza? Trovare un controesempio se la risposta è no.

Esercizio 6. Sia A un anello commutativo unitario e sia \mathfrak{m} un suo ideale massimale. Trovare una struttura di spazio vettoriale per $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$.

Esercizio 7. Denotiamo con R l'anello $\mathbb{C}[x, y]$; determinare quali dei seguenti insiemi sono R -moduli:

- ◇ l'ideale $(x^2 - 3y^3)$;
- ◇ $\{p \in R \mid p(0, 0) = 0\}$;
- ◇ $\mathbb{C}[x^2, y^2] \subset R$;
- ◇ $\mathbb{C}[x, y]/(x - 2y)$.

Esercizio 8. Ricordiamo che un R -modulo M si dice *libero* se ha una base. Determinare quali dei seguenti moduli è libero, e trovare una base:

- ◇ \mathbb{Z} come \mathbb{Z} -modulo;
- ◇ $2\mathbb{Z}$ come \mathbb{Z} -modulo;
- ◇ \mathbb{Z} come $2\mathbb{Z}$ -modulo;
- ◇ $\mathbb{Z}[x]$ come \mathbb{Z} -modulo;
- ◇ $\mathbb{Z}[i]$ come \mathbb{Z} -modulo.