

# Algebra I - Esercitazione

10/05/2023

**Esercizio 1.** Dimostrare che i seguenti anelli non sono noetheriani, e determinare quali sono domini d'integrità:

- ◇ l'anello dei polinomi in un insieme numerabile di variabili  $\mathbb{K}[t_1, t_2, t_3, \dots]$ ;
- ◇ l'anello delle funzioni reali continue su un intervallo chiuso proprio  $C[a, b]$ ;
- ◇ l'anello degli interi algebrici complessi  $O_{\mathbb{C}}$ .

**Esercizio 2.** Dimostrare che se un anello  $R$  verifica la condizione della catena ascendente (abbreviato ACC) sugli ideali finitamente generati, allora è noetheriano.

**Esercizio 3.** Siano

$$f: N \longrightarrow M \qquad g: N \longrightarrow M$$

rispettivamente un morfismo suriettivo e un morfismo iniettivo di  $R$ -moduli, dove  $R$  è un anello commutativo unitario. Dimostrare che se  $N$  è un modulo noetheriano (ovvero tale che soddisfa la ACC sui sottomoduli) allora  $f$  è un isomorfismo.

**Esercizio 4.** Sia  $g = x^3 + x - 1 \in A = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[x]$  e sia  $J$  l'ideale generato da  $g$ . Dimostrare che

- ◇  $A/J$  non è un dominio d'integrità;
- ◇  $x^2 - x - 1 + J$  è un divisore dello zero in  $A/J$ .

**Esercizio 5.** Dimostrare che un gruppo di ordine 30 non è semplice.

**Esercizio 6.** Sia  $G$  un gruppo finito e sia  $X$  un insieme finito su cui  $G$  agisce. Denotiamo con  $\mathbb{C}X$  lo spazio vettoriale formale complesso sulla base  $X$ , ovvero lo spazio delle combinazioni lineari formali degli elementi di  $X$  a coefficienti complessi. Esiste un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{C}X$  fissato (non necessariamente puntualmente) dall'azione di  $G$ ? Se  $G$  agisce transitivamente la risposta cambia?

**Esercizio 7.** Sia  $p$  un numero primo. Determinare il numero dei  $p$ -Sylow del gruppo simmetrico  $S_p$  ed il numero di elementi di ordine  $p$ .