Algebra I - Soluzioni 7

10 Maggio

1 Esercizi

Esercizio 1. $\diamond$ Questo anello è un dominio non noetheriano. Per quanto riguarda la noetherianità basta mostrare che la seguente catena

$$(t_1) \subseteq (t_1, t_2) \subseteq \cdots \subseteq (t_1, \ldots, t_n) \subseteq \ldots$$

non si stabilizza mai. Infatti si stabilizzasse all'ideale $(t_1, \ldots, t_k)$, si avrebbe l'uguaglianza

$$(t_1, \ldots, t_k) = (t_1, \ldots, t_k, t_{k+1})$$

e dunque $t_{k+1} \in (t_1, \ldots, t_k)$. Ma è assurdo perché t_{k+1} non è combinazione lineare delle altre variabili. ※

Per mostrare invece che è un dominio si può andare per induzione. Per prima cosa

Lemma 1.1. *Sia A un dominio, allora $A[x]$ è un dominio.*

Proof. Supponiamo per assurdo non lo sia e siano $p, q \in A[x]$ tali che $pq = 0$. Scriviamo per esteso $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ e $q(x) = b_m x^m + \cdots + b_0$ con a_n e b_m non nulli. Nel prodotto di p e q c'è un solo termine di grado $n + m$ ed è $a_n b_m x^{n+m}$. Questo termine è nullo solo se $a_n b_m = 0$, ma essendo elementi di un dominio, questo accade solo se uno dei due è nullo. ※ □

Ora $\mathcal{K}$ è un dominio, e $\mathcal{K}[t_1, \ldots, t_n] = \mathcal{K}[t_1, \ldots, t_{n-1}][t_n]$, dunque segue la tesi.

$\diamond$ Questo anello non è noetheriano e non è un dominio. Indaghiamo un po' come sono fatti gli ideali di questo spazio. Consideriamo $f \in C[a, b]$ e sia

$$S(f) : x \in [a, b] \mid f(x) = 0$$

il supporto di f. Una funzione $g \in (f) = fC[a, b]$ sicuramente si annulla in ogni $x \in S(f)$ perché g è multipla di f. Consideriamo allora una successione di funzioni continue $\{f_n\}_n$ con supporto

$$S(f_n) = \left[\frac{a+b}{2} - \left(\frac{a-b}{2}\right)\frac{1}{n}, \frac{a+b}{2} + \left(\frac{a-b}{2}\right)\frac{1}{n}\right]$$

La successione di ideali

$$(f_1) \subseteq (f_2) \subseteq \cdots \subseteq (f_n) \subseteq \ldots$$

non può mai stabilizzarsi perché per costruzione sono tutte inclusioni strette. Per mostrare che non è un dominio invece consideriamo due funzioni f e g con due supporti diversi tra loro e diversi da $[a, b]$, e tali che $S(f) \cup S(g) = [a, b]$. Il prodotto è la funzione nulla, ma entrambe le funzioni sono diverse dalla funzione nulla.

- ◇ L'anello degli interi algebrici $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ è un dominio ma non è noetheriano. Consideriamo la catena di ideali
$$(3) \subseteq (\sqrt{3}) \subseteq (\sqrt[4]{3}) \subseteq \dots \subseteq (\sqrt[2^n]{3}) \subseteq \dots$$
Questa non si stabilizza, infatti supponiamo lo faccia, si avrebbe
$$\sqrt[2^n]{3} = a \cdot \sqrt[2^{n-1}]{3}.$$
Con qualche conto si ottiene che
$$a = \sqrt[2^n]{\frac{1}{3}}.$$
Il polinomio minimo di a è $3x^{2^n} - 1$. Siccome non è monico, $a \notin \mathcal{O}_{\mathbb{C}}$, assurdo. ※
Siccome l'anello degli interi è un'estensione degli interi, contenuta in $\mathbb{C}$, vale
$$\mathbb{Z} \subseteq \mathcal{O}_{\mathbb{C}} \subseteq \mathbb{C}$$
e le operazioni sono le stesse. Siccome $\mathbb{C}$ non ha divisori dello zero, allora $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ non può avere divisori dello zero e dunque è un dominio.

Esercizio 2. Chiamiamo R l'anello e sia
$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots \subseteq I_n \subseteq \dots$$
una catena ascendente d'ideali.

Supponiamo per assurdo questa catena non si stabilizzi e costruiamo una catena di ideali finitamente generati che non si stabilizza. Prendiamo $x_1 \in I_1$, poi prendiamo $x_2 \in I_2 \setminus I_1$, e in generale $x_n \in I_n \setminus I_{n-1}$. La catena d'ideali
$$(x_1) \subseteq (x_1, x_2) \subseteq \dots \subseteq (x_1, \dots, x_n) \subseteq \dots$$
non si può stabilizzare perché
$$x_n \notin I_{n-1} \supseteq (x_1, \dots, x_{n-1})$$
Ma l'anello verifica ACC per gli ideali finitamente generati, e quindi è una contraddizione. ※

Può essere interessante osservare la somiglianza tra questa dimostrazione e il primo (◇) nel primo esercizio della scheda.

Esercizio 3. Possiamo vedere g come un'inclusione di N in M. Consideriamo gli insiemi
$$K_0 := \ker f, \quad K_n := \{x \in N \mid (f \circ g)^i(x) \in N \forall j < n, \text{ e } (f \circ g)^n(x) = 0\}$$
Se interpretiamo N come sottomodulo di M, K_i contiene tutti gli elementi di N che si annullano dopo n iterazioni di f. Questa è una catena ascendente di ideali, e dunque, per noetherianità, si stabilizza. Sia K_m dove si stabilizza. Prendiamo $x_1 \in K_1$. Per suriettività di f, possiamo prendere x_2 tale che $f(x_2) = x_1$, poi x_3 tale che $f(x_3) = x_2$ e così via fino a x_{m+1}. Siccome $x_{m+1} \in K_{m+1} = K_m$, allora per definizione di K_m, $x_1 = 0$.

Esercizio 4.
- ◇ Il polinomio $x^3 + x - 1$ è di terzo grado in un dominio a ideali principali, dunque per verificare se è primo, bisogna verificare se si annulla in qualche numero. Ora $g(0) = -1$, $g(1) = 1$ e $g(-1) = 0$. Il polinomio quindi si divide per $(x + 1)$ e dunque non è primo. Segue che A/J non è un dominio d'integrità.
- ◇ Dividendo g per $(x + 1)$ si ottiene $x^2 - x - 1$. I divisori dello zero in A/J coincidono proprio con i polinomi che dividono g, infatti
$$(x + 1 + J)(x^2 - x - 1 + J) = x^3 + x - 1 + J = 0 + J.$$

Esercizio 5. Per il terzo teorema di Sylow valgono

$$n_2 \in \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$$
$$n_3 \in \{1, 10\}$$
$$n_5 \in \{1, 6\}$$

Supponiamo G non sia semplice, allora non può avere sottogruppi normali, e dunque $n_p \neq 1$. Al minimo G ha

$$3 \cdot (2-1) = 3 \text{ elementi di ordine } 2$$
$$10 \cdot (3-1) = 20 \text{ elementi di ordine } 3$$
$$6 \cdot (4-1) = 18 \text{ elementi di ordine } 5$$

E quindi in totale dovrebbe avere 1+3+20+18=42¿30 elementi diversi. ※

Esercizio 6. Suddividiamo X in classi di coniugio:

$$X = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_h.$$

Ricordiamo che C è una classe di coniugio se è orbita di un elemento di X.

Gli spazi vettoriali

$$V_i := \langle x \mid x \in C_i \rangle$$

sono tutti fissati dall'azione di G, infatti, per $v \in V_i$ e $g \in G$,

$$g.v = g. \left(\sum_{x_j \in C_i} c_j x_j \right) = \sum_{x_j \in C_i} c_j g.x_j$$

e siccome $g.x_j \in C_i$, $g.v$ è ancora nello span degli elementi di C_i.

Un altra categoria di spazi importanti fissati sono tutti gli spazi del tipo

$$U_i := \left\langle \sum x_i \mid x_i \in C_i \right\rangle.$$

Questi non sono solo invarianti, cioè fissati, ma sono anche fissati puntualmente. Un elemento generico di U_i è un multiplo complesso del vettore $x_1 + \cdots + x_t$ con $C_i = \{x_1, \ldots, x_t\}$, e

$$g.(cx_1 + \cdots + cx_t) = cg.(x_1 + \cdots + x_t) = c(g.x_1 + \cdots + g.x_t)$$

Siccome $x_1, \ldots, x_t$ sono tutti gli elementi di una classe di coniugio, $g.x_1, \ldots, g.x_t$ sono gli stessi elementi, solo ripermutati, e da ciò segue che lo spazio viene fissato puntualmente.

Ora, chiedendo la transitività dell'azione, si ottiene una decomposizione in classi di coniugio banale, infatti X diventa una unica classe di coniugio. Non si possono dire molte più cose rispetto a prima, salvo che lo spazio

$$V_1 := \langle x \mid x \in X \rangle$$

è tutto $\mathbb{C}X$, dunque è banale.

Mostriamo ora che nel caso generale non si può dire molto di più di quanto osservato prima.

1) $G = \mathfrak{S}_3$ che agisce sull'insieme $\{1, 2, 3\}$. I sottospazi fissati sono

$$\langle 0 \rangle \leq \langle 1+2+3 \rangle \leq \langle 1, 2, 3 \rangle = \mathbb{C}\{1, 2, 3\}.$$

2) $G = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ che agisce sull'insieme $\{1, 2, 3, 4\}$. I sottospazi fissati sono

$$\begin{array}{c} \langle 1+2, 3+4 \rangle \\ \langle 0 \rangle \leq \langle 1+2+3+4 \rangle \leq \langle 1+3, 2+4 \rangle \leq \langle 1, 2, 3, 4 \rangle = \mathbb{C}\{1, 2, 3, 4\} \\ \langle 1+4, 2+3 \rangle \end{array}$$

Da ciò si evince che possono sia essere gli unici sottospazi fissati, sia non esserlo.

Esercizio 7. I p-Sylow di un gruppo contengono tutti gli elementi di ordine potenze di p, dunque basta contare quanti elementi di questo ordine ci sono in $\mathfrak{S}_p$. Le permutazioni di ordine p consistono in tutti i cicli con struttura ciclica massimale. Contiamo gli elementi proprio sfruttando la scrittura ciclica. La domanda quindi è: quanti elementi hanno struttura ciclica

$$(a_1, \ldots, a_p)?$$

Nella struttura ciclica il primo elemento si assume sempre essere il più basso per dare un ordine canonico. Qui il numero più basso è necessariamente 1, dunque ci chiediamo in quanti modi possiamo avere

$$(1, a_2, \ldots, a_p).$$

Si osserva che a_i sono liberi, infatti ogni scelta di $p-1$ numeri definisce un p-ciclo e due scelte non definiscono mai lo stesso elemento. Segue che gli elementi di ordine p sono $(p-1)!$. A questo punto il numero di p-Sylow è

$$n_p = \frac{(p-1)!}{(p-1)} = (p-2)!$$