Algebra I - Esercitazione

24/05/2023

Esercizio 1. Sia $V = \mathbb{C}^5$ e sia T l'endomorfismo lineare di V dato dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Usare il Teorema di Struttura per i moduli finitamente generati per determinare i fattori invarianti di V, visto come $\mathbb{C}[x]$-modulo.

Esercizio 2. Siano V un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale di dimensione finita e T un suo endomorfismo lineare. Supponiamo che dotando V della struttura di $\mathbb{C}[x]$-modulo indotta da T, applicando il teorema di struttura dei moduli finitamente generati su un PID, si ottenga

$$\mathbb{C}[x]/(x+i) \oplus \mathbb{C}[x]/(x^2+1) \oplus \mathbb{C}[x]/(x^4+1)$$

Determinare la dimensione di V e la forma di Jordan di T.

Esercizio 3. Siano R un anello commutativo unitario e M un R-modulo che sia addendo diretto di un R-modulo libero F; dimostrare che M verifica la seguente proprietà: comunque dati R-moduli P e Q e morfismi di R-moduli

$$P \overset{\alpha}{\twoheadrightarrow} Q \qquad M \xrightarrow{\beta} Q$$

con α suriettivo, esiste $\gamma \colon M \to P$ tale che $\beta = \alpha \circ \gamma$.
Determinare se è vero il viceversa.

Esercizio 4. Trovare generatori per i nuclei dei seguenti morfismi di anelli

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}[x] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto 2+\sqrt[3]{3} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mathbb{Z}[x] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mathbb{R}[x] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 3+\sqrt[4]{2} \end{aligned}$$

e determinare se sono massimali.

Esercizio 5. Sia $\mathbb{K} \supseteq \mathbb{F}$ un'estensione di campi e sia $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$. Definiamo la mappa

$$\begin{aligned} \mathrm{ev}_{\bar{a}} \colon \mathbb{F}[x_1, x_2, \dots, x_n] &\longrightarrow \mathbb{K} \\ p &\longmapsto p(\bar{a}) \end{aligned}$$

Verificare che $\mathrm{ev}_{\bar{a}}$ è un morfismo di $\mathbb{F}$-algebre, ovvero è lineare in $\mathbb{F}$ ed è un morfismo di anelli.

Esercizio 6. Determinare tutte le relazioni di inclusione o uguaglianza soddisfatte dai seguenti campi:

$$\mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{7}) \qquad \mathbb{Q}(\sqrt{5}+\sqrt{7}) \qquad \mathbb{Q}(\sqrt{35}) \qquad \mathbb{Q}(\sqrt{5}-\sqrt{7})$$

Esercizio 7. Sia $\mathbb{K} \supseteq \mathbb{F}$ un'estensione algebrica di campi e sia R un sottoanello di $\mathbb{K}$ contenente $\mathbb{F}$. Dimostrare che R è un campo.