

Algebra 1
Proff. A. De Sole, D. Valeri
Primo appello, 26 giugno 2024

Nome: _____

Cognome: _____

Numero di matricola: _____

Docente: **De Sole** \ **Valeri** (cerchiare il/i docente/i).

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	6	
2	6	
3	6	
4	6	
5	6	
Totale	30	

Esercizio 1. Determinare tutti gli interi positivi n tali che $n^2 + 1$ sia divisibile per $n + 1$.

Soluzione:

Risposta: $n =$

Esercizio 2. Siano $X = \{1, 2, 3\}$, $\Omega = \{f : X \rightarrow X\}$, e si consideri il gruppo $G = S_3 \times S_3$. Per ogni $(\sigma, \tau) \in G$ e $f \in \Omega$, denotiamo

$$((\sigma, \tau) \cdot f)(x) = \sigma(f(\tau^{-1}(x))).$$

- (a) Mostrare che \cdot definisce un'azione di G su Ω .
- (b) Determinare lo stabilizzatore G_{1_X} e calcolare la cardinalità dell'orbita \mathcal{O}_{1_X} della funzione identità $1_X \in \Omega$, definita da $1_X(x) = x$ per ogni $x \in X$.
- (c) Determinare lo stabilizzatore G_χ e calcolare la cardinalità dell'orbita \mathcal{O}_χ della funzione $\chi \in \Omega$ definita da $\chi(x) = 1$ per ogni $x \in X$.

Soluzione:

Risposta:

(b) $G_{1_X} = \boxed{}$, $|\mathcal{O}_{1_X}| = \boxed{}$, (c) $G_\chi = \boxed{}$, $|\mathcal{O}_\chi| = \boxed{}$

Esercizio 3. Sia $p \in \mathbb{Z}$ un primo positivo. Si consideri l'anello

$$A_p = \mathbb{Q}[x]/(x^4 - 11x^2 + 2p).$$

- (a) Determinare tutti gli ideali di A_5 .
- (b) Per quali primi $p > 0$ A_p è un campo?

Soluzione:

Risposta:

(a) Ideali di A_p :

, (b) $p =$

Esercizio 4. Determinare la forma canonica di Smith della seguente matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & -8 \\ 12 & 14 & 6 \\ 4 & -4 & 8 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{3 \times 3}(\mathbb{Z}).$$

Soluzione:

Risposta:

Esercizio 5. Sia \mathbb{F} un campo e sia \mathbb{K} il campo di spezzamento su \mathbb{F} del polinomio $x^4 + 1$. Calcolare $[\mathbb{K} : \mathbb{F}]$ nei seguenti casi:

(a) $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$;

(b) $\mathbb{F} = \mathbb{F}_5$.

Soluzione:

Risposta: (a) $[\mathbb{K} : \mathbb{F}] =$; (b) $[\mathbb{K} : \mathbb{F}] =$.

Foglio per la brutta copia

Foglio per la brutta copia

Foglio per la brutta copia