Algebra 1

Proff. A. De Sole, D. Valeri

Primo esonero del 11 gennaio 2024

Nome: *Alberto*

Cognome: *Valeri*

Numero di matricola: *0123456789*

Docente: **De Sole** \ **Valeri** (cerchiare il/i docente/i).

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	6	6
2	6	6
3	6	6
4	6	6
5	6	6
Totale	30	30

Esercizio 1. Trovare tutte le soluzioni $x, y \in \mathbb{Z}$ dell'equazione

$$41x + 27y = 1\,.$$

Soluzione:

Facendo divisioni con resto, abbiamo $41 = 27 + 14$, $27 = 2 \times 14 - 1$, da cui $1 = 2 \times 14 - 27 = 2 \times (41 - 27) - 27 = 2 \times 41 - 3 \times 27$. Abbiamo dunque trovato una soluzione: $x = 2, y = -3$. Ogni altra soluzione è: $x = 2 + 27k, y = -3 - 41k$, per $k \in \mathbb{Z}$.

Risposta: $\boxed{x = 2 + 27k, \qquad y = -3 - 41k,\ k \in \mathbb{Z}}$

Esercizio 2. Sia G un gruppo e $Z(G)$ il suo centro.

(a) Mostrare che se $G/Z(G)$ è ciclico, allora G è abeliano.

(b) Se G è non abeliano di ordine p^3, con p primo, calcolare l'ordine di $Z(G)$.

Soluzione:
(a) Sia $x \in G$ tale che $G/Z(G) = \langle \bar{x} \rangle$. Dunque $G = Z(G) \sqcup Z(G)x \sqcup Z(G)x^2 \sqcup \dots$. Dati allora $a, b \in G$, abbiamo $a = x^i z$, $b = x^j w$, per qualche $i, j \in \mathbb{Z}$ e $z, w \in Z(G)$. Quindi

$$ab = x^i z x^j w = x^{i+j} zw = ba\,.$$

(b) $|Z(G)| \, \big| \, |G| = p^3$, quindi $|Z(G)| = 1, p, p^2$ o p^3. $|Z(G)| \neq p^3$ poiché per ipotesi G non è abeliano. $|Z(G)| \neq 1$ poiché il centro di un p-gruppo è non banale (visto a lezione). Se fosse $|Z(G)| = p^2$, avremmo $|G/Z(G)| = p$, ovvero $G/Z(G) \simeq C_p$ ciclico, e per la parte (a) G sarebbe abeliano. Quindi necessariamente $|Z(G)| = p$.

Risposta: (b) $|Z(G)| = \boxed{p}$

Esercizio 3. Il gruppo simmetrico S_{30} possiede un elemento di ordine 209? Se si, determinare un tale elemento; se no, dimostrarne la non esistenza.

Soluzione:

Abbiamo $209 = 11 \times 19$ e $11 + 19 = 30$. Quindi il prodotto di un 11-ciclo e un 19-ciclo disgiunti ha ordine esattamente $11 \times 19 = 209$.

Risposta: (a) $\exists$? **SI** / **NO** (cerchiare la risposta corretta).

(b) Esempio / Dim. in breve: $\sigma = (1, 2, \ldots, 11)(12, 13, \ldots, 30)$

Esercizio 4. (a) Sia G un gruppo di ordine n con un'azione non banale su un insieme X con k elementi. Mostrare che se n non divide $k!$, allora G non può essere semplice.

(b) Mostrare che un gruppo di ordine 224 non può essere semplice.

Soluzione:
(a) L'azione di G su X dà un omomorfismo $\phi : G \to S_k$. Quindi $\mathrm{Im}(\phi) \subset S_k$ e $|\,\mathrm{Im}(\phi)|\,\big|\, k!$. Per ipotesi n non divide $k!$, quindi G non può essere isomorfo a $\mathrm{Im}(\phi)$ e quindi $\ker(\phi) \neq \{1\}$. Inoltre $\ker(\phi) \neq G$ poichè l'azione è non banale. Quindi $\ker(\phi)$ è il sottogruppo normale cercato.
(b) Abbiamo $224 = 2^5 \times 7$. Sia $X = \{H \subset G \mid H \text{ 2-Sylow}\}$. Si ha $s_2 = |X| \in \{1, 7\}$. Se $s_2 = 1$, allora l'unico 2-Sylow è normale e G non è semplice. Se $s_2 = 7$, poichè G agisce non banalmente su X e 224 non divide 7!, il risultato segue da (a).

Risposta:

(a) Dim. in breve:	L'azione non banale induce un omomorfismo $\phi : G \to S_k$ con $\ker(\phi) \neq G$. L'ipotesi n non divide k implica che $\ker(\phi) \neq 1$. Ne segue che $\ker(\phi) \subset G$ è un sottogruppo normale proprio.
(b) Dim. in breve:	Il numero s_2 di 2-Sylow può essere 1 oppure 7. Se $s_2 = 1$, il 2-Sylow è normale e G non è semplice. Se $s_2 = 7$ si considera l'azione di G sui 2-Sylow e si usa il punto (a).

Esercizio 5. Si considerino l'insieme $\mathbb{Q}_2 = \left\{ \frac{a}{b} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Z},\, b \neq 0,\, (2, b) = 1 \right\}$ e il sottoinsieme $I = \left\{ 2q \,\middle|\, q \in \mathbb{Q}_2 \right\}$. Mostrare che $\mathbb{Q}_2$ è un sottoanello di $\mathbb{Q}$ e che I è l'unico ideale massimale di $\mathbb{Q}_2$.

Soluzione: La verifica che $\mathbb{Q}_2$ è un sottoanello di $\mathbb{Q}$ è immediata. $I = (2)$ è l'ideale principale generato da $2 \in \mathbb{Q}_2$. Consideriamo l'omomorfismo suriettivo di anelli $\phi : \mathbb{Q}_2 \to \mathbb{F}_2$, $\frac{a}{b} \mapsto a \bmod 2$. Si ha $\ker(\phi) = I$, dunque I è massimale poichè $\mathbb{Q}_2/I \cong \mathbb{F}_2$ e $\mathbb{F}_2$ è un campo. Osserviamo che se $x = \frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{Q}_2 \setminus I$, allora $(2, \alpha) = 1$, da cui otteniamo che x è invertibile (l'inverso è $x^{-1} = \frac{\beta}{\alpha} \in \mathbb{Q}_2$). Sia $J \neq (0)$ un ideale di $\mathbb{Q}_2$. Assumiamo esista $x \in J \setminus I$. Allora $1 = x^{-1}x \in J$. Quindi $J = \mathbb{Q}_2$. Ne segue che se J è un ideale proprio, allora deve essere contenuto in I, che dunque è l'unico ideale massimale.

Foglio per la brutta copia

Foglio per la brutta copia

Foglio per la brutta copia