

Algebra 1

Proff. A. De Sole, D. Valeri

Primo esonero del 11 gennaio 2024

Nome: _____

Cognome: _____

Numero di matricola: _____

Docente: **De Sole** \ **Valeri** (cerchiare il/i docente/i).

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	6	
2	6	
3	6	
4	6	
5	6	
Totale	30	

Esercizio 1. Trovare tutte le soluzioni $x, y \in \mathbb{Z}$ dell'equazione

$$41x + 27y = 1.$$

Soluzione:

Risposta:

Esercizio 2. Sia G un gruppo e $Z(G)$ il suo centro.

(a) Mostrare che se $G/Z(G)$ è ciclico, allora G è abeliano.

(b) Se G è non abeliano di ordine p^3 , con p primo, calcolare l'ordine di $Z(G)$.

Soluzione:

Risposta: (b) $|Z(G)| =$

Esercizio 3. Il gruppo simmetrico S_{30} possiede un elemento di ordine 209? Se si, determinare un tale elemento; se no, dimostrarne la non esistenza.

Soluzione:

Risposta: (a) \exists ? **SI** / **NO** (cerchiare la risposta corretta).

(b) Esempio / Dim. in breve:

Esercizio 4. (a) Sia G un gruppo di ordine n con un'azione non banale su un insieme X con k elementi. Mostrare che se n non divide $k!$, allora G non può essere semplice.

(b) Mostrare che un gruppo di ordine 224 non può essere semplice.

Soluzione:

Risposta:

(a) Dim. in breve:

(b) Dim. in breve:

Esercizio 5. Si considerino l'insieme $\mathbb{Q}_2 = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0, (2, b) = 1 \right\}$ e il sottoinsieme $I = \{2q \mid q \in \mathbb{Q}_2\}$. Mostrare che \mathbb{Q}_2 è un sottoanello di \mathbb{Q} e che I è l'unico ideale massimale di \mathbb{Q}_2 .

Soluzione:

Foglio per la brutta copia

Foglio per la brutta copia

Foglio per la brutta copia