Algebra 1

Proff. A. De Sole, D. Valeri

Secondo esonero dell'11 giugno 2024

Nome: *Alberto*

Cognome: *Valeri*

Numero di matricola: *0123456789*

Docente: **De Sole** \ **Valeri** (cerchiare il/i docente/i).

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	6	6
2	6	6
3	6	6
4	6	6
5	6	6
Totale	30	30

Esercizio 1. Sia $I = \{p \in \mathbb{Q}[x] \mid p(2) = p(1/2) = p(\sqrt{2}) = 0\}$.

(a) Si provi che I è un ideale di $\mathbb{Q}[x]$.

(b) Si determinino tutti gli ideali massimali di $\mathbb{Q}[x]$ contenenti I.

Soluzione:

I è l'ideale principale generato dal polinomio $f(x) = (x-2)(x-1/2)(x^2-2)$. Gli ideali massimali contenenti I sono gli ideali principali generati dai fattori irriducibili di $f(x)$.

Risposta:

Ideali massimali:	$(x-2), (x-\frac{1}{2}), (x^2-2)$

Esercizio 2. Si consideri l'anello quoziente $A = \mathbb{Z}[i]/(13)$.

(a) Determinare tutti gli ideali di A.

(b) Determinare la cardinalità di A.

Soluzione:

In $\mathbb{Z}[i]$ vale la fattorizzazione in irriducibili $13 = (2+3i)(2-3i)$. Gli ideali di A sono in corrispondenza biunivoca con gli ideali $J \subset \mathbb{Z}[i]$ che contengono (13). Questi sono $J = (13), (2+3i), (2-3i), \mathbb{Z}[i]$.

La mappa $\mathbb{Z}[i] \to \mathbb{Z}/13\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ definita da $a + ib \mapsto (a \bmod 13, b \bmod 13)$ è un omomorfismo suriettivo di anelli con nucleo $(13) \subset \mathbb{Z}[i]$. Quindi $A \cong \mathbb{Z}/13\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$.

Risposta:

(a) Ideali di A: $\boxed{(0), (\overline{2+3i}), (\overline{2-3i}), A}$, (b) $|A| = \boxed{169}$

Esercizio 3. Sia G un gruppo abeliano con tre generatori x, y, z, soggetti alle relazioni

$$x - 3z = 0\,, \qquad x + 2y + 5z = 0\,.$$

Descrivere G come prodotto di gruppi ciclici.

Soluzione: La matrice di presentazione di G è $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. La sua forma canonica di Smith è la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Risposta: $G \simeq$ $\boxed{\mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}}$

Esercizio 4. Determinare il polinomio minimo $f(x)$ di $\sqrt{2} + \sqrt[3]{5}$ sul campo $\mathbb{Q}$.

Soluzione:

Sia ζ una radice primitiva terza dell'unità e denotiamo $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{5}, \zeta)$. $\mathbb{K}$ è un'estensione di Galois (è il campo di spezzamento di $(x^2-2)(x^3-5)$) con $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] = 12$ e il suo gruppo di Galois è $G \cong C_2 \times S_3 \subset S_5$ generato dalle permutazioni $(12), (34)$ e (45) (usando la seguente enumerazione per le radici di $(x^2-2)(x^3-5)$: $\alpha_1 = \sqrt{2}$, $\alpha_2 = -\sqrt{2}$, $\alpha_3 = \sqrt[3]{5}$, $\alpha_4 = \zeta\sqrt[3]{5}$, $\alpha_5 = \zeta^2\sqrt[3]{5}$). L'orbita di $\sqrt{2} + \sqrt[3]{5} \in \mathbb{K}$ tramite l'azione del gruppo di Galois G è

$$\{\pm\sqrt{2} + \sqrt[3]{5}, \pm\sqrt{2} + \zeta\sqrt[3]{5}, \pm\sqrt{2} + \zeta^2\sqrt[3]{5}\}\,.$$

Quindi il polinomio

$$\begin{aligned} f(x) &= \prod_{a=1}^{3}(x - \sqrt{2} - \zeta^a\sqrt[3]{5})(x + \sqrt{2} - \zeta^a\sqrt[3]{5}) = \Big((x-\sqrt{2})^3 - 5\Big)\Big((x+\sqrt{2})^3 - 5\Big) \\ &= (x^3 + 6x - 5)^2 - 2(3x^2+2)^2 = x^6 - 6x^4 - 10x^3 + 12x^2 - 60x + 17 \end{aligned}$$

è il polinomio minimo di $\sqrt{2} + \sqrt[3]{5}$ su $\mathbb{Q}$.

Risposta: $f(x) = \boxed{x^6 - 6x^4 - 10x^3 + 12x^2 - 60x + 17}$

Esercizio 5. Determinare la classe di isomorfismo del gruppo di Galois $G = Gal(\mathbb{K}/\mathbb{F})$ per le seguenti estensioni di campi:

(a) $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$, $\mathbb{K} = \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$;

(b) $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$, $\mathbb{K} = \mathbb{Q}[\sqrt[4]{2}]$;

(c) $\mathbb{F} = \mathbb{F}_5(x^4)$, $\mathbb{K} = \mathbb{F}_5(x)$.

Soluzione:

(a) $\mathbb{K}$ è il campo di spezzamento del polinomio $(x^2-2)(x^2-3)$ quindi $|G| = [\mathbb{K} : \mathbb{F}] = 4$ (poichè $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ sono linearmente indipendenti su $\mathbb{Q}$). Un elemento di G deve preservare i polinomi (x^2-2) e (x^2-3) quindi non può avere ordine 4. Ne segue che G è un gruppo di Klein.

(b) $\mathbb{K}$ non è un'estensione di Galois di $\mathbb{Q}$ poichè $\sqrt[4]{2}$ è una radice del polinomio irriducibile x^4-2 che ha due radici reali e due immaginarie pure, ma $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}$. G è il gruppo che permuta le due radici reali poichè $\mathbb{K} \subset \mathbb{Q}[\sqrt[4]{2}, i]$ che è il campo di spezzamento di x^4-2.

(c) $\mathbb{K}$ è il campo di spezzamento del polinomio irriducibile $t^4 - x^4 \in \mathbb{F}[t]$. Su $\mathbb{K}$ si ha

$$t^4 - x^4 = (t-x)(t-2x)(t-3x)(t-4x)\,,$$

quindi $|G| = [\mathbb{K} : \mathbb{F}] = 4$. L'automorfismo di $\mathbb{K}$ che manda $x \mapsto 2x$ ha ordine 4 e fissa $\mathbb{F}$, quindi G è ciclico.

Risposta: (a) $G = \boxed{C_2 \times C_2}$; (b) $G = \boxed{C_2}$; (c) $G = \boxed{C_4}$.

Foglio per la brutta copia

Foglio per la brutta copia

Foglio per la brutta copia