12 Dodicesimo foglio

In questo foglio di esercizi si assuma ogni anello commutativo con identità, un morfismo fra anelli in questo contesto manda l'identità nell'identità.

Esercizio 12.1. Sia A un PID e $I = (p)$ un ideale tale che $A/(p)$ sia finito. Dimostrare che $|A/I|^n = |A/I^n|$.

Indicazione. Considerando l'omomorfismo di gruppi abeliani

$$\begin{aligned} A &\to A/I^2 \\ x &\mapsto \overline{px} \end{aligned}$$

costruire un isomorfismo (di gruppi) $A/I \to I/I^2$. Generalizzare questa costruzione per ottenere un isomorfismo di gruppi $A/I \to I^k/I^{k+1}$ per ogni $k \geq 1$. Osservare infine che $A/I^k = \frac{A/I^{k+1}}{I^k/I^{k+1}}$ in generale.

Esercizio 12.2. Utilizzando il teorema cinese del resto per polinomi, dimostrare il seguente risultato di interpolazione: per ogni $n \geq 1$ e per ogni scelta di due n-uple di numeri razionali $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ e $b_1, b_2, \ldots, b_n$, esiste un unico polinomio $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$ di grado al più $n - 1$ tale che $p(a_i) = b_i$ per ogni i.

Esercizio 12.3. Descrivere $\mathbb{Q}[x, y]/(x - y, x^3 + y^3 - x)$ come prodotto di campi e determinare la dimensione dell'anello visto come spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$.

Esercizio 12.4.

1. Dimostrare che ogni omomorfismo di anelli unitari $\phi : \frac{\mathbb{Z}[x]}{(x^2+1)} \to \mathbb{C}$ è iniettivo.
2. Sia $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Sotto quali condizioni su $p(x)$ esiste un omomorfismo di anelli unitari $\Phi : \frac{\mathbb{Z}[x]}{(p(x))} \to \mathbb{R}$ e sotto quali condizioni ne esiste uno iniettivo?

Esercizio 12.5. Sia A un anello e sia $A[x]$ l'anello dei polinomi con coefficienti in A in una indeterminata. Dimostrare che se $A[x]$ è un dominio ad ideali principali, allora A è un campo.

Esercizio 12.6. Descrivere gli ideali massimali di $\mathbb{Z}[x]$.