13 Tredicesimo foglio

Esercizio 13.1. Sia $A = \mathbb{Z}[i]$ l'anello degli interi di Gauss e siano a, b interi con $(a, b) = 1$.

1. Supponiamo che $a + b$ sia dispari. Dimostrare che gli anelli $\frac{A}{(a^2+b^2)}$ e $\frac{A}{(a+bi)} \times \frac{A}{(a-bi)}$ sono isomorfi.

2. Sia $S = \{(1+i)^n : n \in \mathbb{N}\}$ e sia $B = S^{-1}A$. Dimostrare che gli anelli $\frac{B}{(a^2+b^2)}$ e $\frac{B}{(a+bi)} \times \frac{B}{(a-bi)}$ sono isomorfi.

Esercizio 13.2. Sia A un anello commutativo con unità e $B = A[x]$.

1. Dimostrare che gli elementi nilpotenti di B sono i polinomi ognuno dei cui coefficienti è nilpotente.

2. Sia $F(x)$ un divisore di zero in B. Dimostrare che esiste un elemento $g \in A$ (ovvero nell'anello dei coefficienti) tale che $g \cdot F(x) = 0$.

Esercizio 13.3. Sia A un anello qualsiasi e $B = A[x]$.

1. Sia P un ideale primo di A. Dimostrare che $P[x]$ è un ideale primo di $A[x]$.

2. Dimostrare che gli elementi invertibili di B sono i polinomi $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ tali che $a_0 \in A^\times$ e $a_1, \ldots, a_n$ sono nilpotenti.

~~**Esercizio 13.4.** Sia A un anello qualsiasi, dimostrare che se $A[x]$ è un dominio ad ideali principali, allora A è un campo.~~

Esercizio 13.5. Dimostrare che due polinomi in $\mathbb{Z}[x]$ sono coprimi in $\mathbb{Q}[x]$ se e solo se l'ideale che generano in $\mathbb{Z}[x]$ contiene un intero.

Esercizio 13.6. Dimostrare che i seguenti polinomi sono irriducibili in $\mathbb{Z}[x]$:

1. $x^2 + 27x + 213$

2. $x^3 + 6x + 12$

3. $8x^3 - 6x + 1$

4. $x^3 + 6x^2 + 7$

5. $x^5 - 3x^4 + 3$