Esercizi - foglio 18 (consegna 27 maggio)

Esercizio 18.1 Si consideri il campo $\mathbb{K} = \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}]$.
(a) Determinare il grado dell'estensione $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}]$.
(b) Determinare il gruppo di Galois $\mathrm{Gal}(\mathbb{K}/\mathbb{F})$.
(c) Dimostrare che $\mathbb{Q} \subset \mathbb{K}$ è un'estensione di Galois.

Esercizio 18.2 Sia $\mathbb{K}$ il campo ottenuto aggiungendo a $\mathbb{Q}$ tutte e quattro le radici del polinomio $(x^2 - 2x - 2)(x^2 - 2x - 7)$. Determinare il gruppo di Galois $\mathrm{Gal}(\mathbb{K}/\mathbb{Q})$.

Esercizio 18.3 Sia $\alpha \in \mathbb{C}$ una radice del polinomio $f(x) = x^4 - 8x^2 + 36$. Mostrare che il polinomio $f(x)$ fattorizza completamente in $\mathbb{Q}[\alpha][x]$ e mostrare che il gruppo di Galois $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}[\alpha]/\mathbb{Q})$ è isomorfo al gruppo di Klein.

Esercizio 18.4 Sia $\xi \in \mathbb{C}$ una radice primitiva settima dell'unità. Determinare il polinomio minimo di $\alpha = \xi^3 + \xi^5 + \xi^6$ su $\mathbb{Q}$ ed il polinomio minimo di ξ su $\mathbb{Q}[\alpha]$.

Esercizio 18.5 Determinare tutti i sottocampi del campo $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$.

Esercizio 18.6 Determinare il grado $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}]$, dove $\mathbb{K}$ è campo di spezzamento per i seguenti polinomi in $\mathbb{Q}[x]$:
(a) $x^4 - 1$
(b) $x^3 - 2$
(c) $x^4 + 1$

Esercizio 18.7 Sia $\alpha = \sqrt[4]{2}$ la radice quarta reale positiva di 2. Fattorizzare il polinomio $x^4 - 2$ come prodotto di fattori irriducibili su ognuno dei seguenti campi:
(a) $\mathbb{Q}$
(b) $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$
(c) $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, i]$
(d) $\mathbb{Q}[\alpha]$,
(e) $\mathbb{Q}[\alpha, i]$

Esercizio 18.8 Sia $\mathbb{F} \subset \mathbb{K}$ un'estensione di Galois (in char=0) con gruppo di Galois isomorfo a $C_2 \times C_{12}$. Quanti sono i campi intermedi $\mathbb{F} \subset \mathbb{L} \subset \mathbb{K}$ tali che:
(a) $[\mathbb{L} : \mathbb{F}] = 4$;
(b) $[\mathbb{L} : \mathbb{F}] = 9$;
(c) $\mathrm{Gal}(\mathbb{K}/\mathbb{L}) \simeq C_4$?