

2 Secondo foglio

Esercizio 2.1. Se in un gruppo ogni elemento a parte l'identità ha ordine due vale la proprietà commutativa?

Esercizio 2.2. Dimostrare che se un gruppo ha un sottogruppo con la metà degli elementi allora le classi laterali sinistre e destre coincidono. In altre parole il sottogruppo è normale. Dire se la stessa cosa vale per un sottogruppo con un terzo degli elementi.

Esercizio 2.3 (Gruppo diedrale D_n). Il gruppo diedrale di ordine $2n$ si può scrivere per generatori e relazioni come: $D_n = \langle x, y | x^n = id, y^2 = id, xyxy = id \rangle$.

1. Quanti elementi ha D_n ?
2. Quali e quanti sono i sottogruppi di D_4 ?
3. Per ogni sottogruppo elencare le classi laterali destre e sinistre.
4. Quali e quanti sono i sottogruppi normali?

Esercizio 2.4 (Il gruppo delle unità dei quaternioni Q_8). Esso è formato dagli elementi $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ il cui prodotto estende quello fra numeri complessi aggiungendo due unità immaginarie j, k in modo che $i^2 = k^2 = j^2 = -1$ e tale che valga una regola ciclica $ij = k, jk = i, ki = j$ con analogia regola anticiclica $ji = -k, kj = -i, ik = -j$.

1. Quali e quanti sono i sottogruppi di Q_8 ?
2. Per ogni sottogruppo elencare le classi laterali destre e sinistre.
3. Quali e quanti sono i sottogruppi normali?

Esercizio 2.5. Verificare che, dato un gruppo G ed un suo elemento $g \in G$, la funzione $h \mapsto ghg^{-1}$ è un isomorfismo di gruppo.

Esercizio 2.6 (*). Provare che se un gruppo ha un numero pari di elementi allora ha almeno un elemento di ordine 2.