3 Terzo foglio

Esercizio 3.1 (coniugio). Preso un gruppo G consideriamo la relazione

$$g \sim h \Leftrightarrow \exists k \in G | kgk^{-1} = h$$

Due elementi così si dicono coniugati. E l'insieme di tutti gli elementi coniugati fra loro è detta classe di coniugio.

1. Provare che è una relazione di equivalenza su G.
2. Dati due elementi coniugati cosa si può dire sulle loro potenze? E sul loro ordine?
3. Abbiamo visto che le classi laterali hanno sempre lo stesso numero di elementi, vale anche per le classi di coniugio?
4. Provare che se le classi di coniugio hanno lo stesso numero di elementi allora il gruppo è abeliano e viceversa.

Esercizio 3.2. Per ogni sottogruppo normale di C_{12}, D_4 e Q_8 trovati nel foglio precedente descrivere il gruppo quoziente e la sua tavola moltiplicativa.

Esercizio 3.3 (Gruppo alterno A_n). Il gruppo alterno è un sottoinsieme del gruppo di simmetrie S_n, in particolare è definito ipotizzando che usassi gli elementi di S_n per permutare le colonne di una matrice. Alcuni di questi elementi lascerebbero invariato il determinante mentre altri gli cambierebbero il segno, A_n è l'insieme di quelli che non cambiano il segno.

1. Dimostrare che A_n è un sottogruppo, dire inoltre quanti elementi ha.
2. Quale è il numero minimo di generatori di A_4?
3. quali e quanti sono i sottogruppi di A_4.
4. Quali e quanti sono i sottogruppi normali?
5. Per ogni sottogruppo normale specificare il gruppo quoziente e la sua tavola moltiplicativa.

Esercizio 3.4 (alcuni morfismi). Determinare quanti e quali sono i morfismi fra i seguenti gruppi:

1. Da $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Z}_n$ e viceversa.
2. Da A_4 a Q_8 e viceversa.
3. Da D_4 a S_3 e viceversa.

Esercizio 3.5. Siano h, k interi positivi tali che h divida k. Mostrare che:

$$h\mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \sim \mathbb{Z}_{k/h}$$