

5 Quinto foglio

Esercizio 5.1 (ESSENZIALE! Lista delle cose vere e false). Discutere la veridicità delle seguenti equivalenze, dimostrandole o dando controesempi, elencando condizioni sufficienti a renderle vere o discutendo quale verso è sempre vero:

- $x \equiv_{ab} y \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv_b y \\ x \equiv_a y \end{cases}$
- $x \equiv_a y \Leftrightarrow bx \equiv_a by$
- $x \equiv_a y \Leftrightarrow bx \equiv_{ab} by$
- $\begin{cases} x \equiv_a y \\ z \equiv_b v \end{cases} \Leftrightarrow az + bx \equiv_{ba} by + av$

GIA' FATTO

Esercizio 5.2 (criterio di divisibilità per 7). Provare che un numero è divisibile per 7 se e solo se il numero privato della prima cifra (unità) meno il doppio della stessa è divisibile per 7.

Ad esempio 287 è divisibile per 7 perché $28 - 7 \cdot 2 = 28 - 14 = 14$ che è multiplo di 7.

Esercizio 5.3. Il numero 123 è invertibile in \mathbb{Z}_{542} ? In caso lo ~~fosse quale sarebbe~~ ^{sia, calcolane} il suo inverso? ~~X~~.

Esercizio 5.4. Risolvere i seguenti sistemi di equazioni modulari:

$$\begin{cases} 2x \equiv_5 1 \\ 4x \equiv_7 1 \\ 7x \equiv_{11} 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x \equiv_{15} 3 \\ 3x \equiv_8 5 \\ 4x \equiv_7 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 7x \equiv_{12} 4 \\ 5x \equiv_{26} 6 \\ x \equiv_6 0 \end{cases}$$

Esercizio 5.5. Risolvere i seguenti sistemi di equazioni modulari:

$$2^x \equiv_{12} 2 \quad 3^x \equiv_{15} 3 \quad \begin{cases} 4x \equiv_6 2 \\ 2^x \equiv_5 3 \end{cases} \quad \begin{cases} 5^x \equiv_8 -3 \\ 2^x \equiv_{25} 7 \\ 3^x \equiv_7 5 \end{cases}$$

Esercizio 5.6. Per quali valori n, m il numero $2^n + 2^m$ è divisibile per 9?

Esercizio 5.7. Quali sono le ultime tre cifre decimali del numero $2023^{2^{102}}$?